MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Recouvrements d'un rectangle de largeur 3 à l'aide de triminos

Mathématiques et sciences humaines, tome 130 (1995), p. 27-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1995__130__27_0>

Math. Inf. Sci. hum. (33e année, n°130, *1995*, pp.27-31)

RECOUVREMENTS D'UN RECTANGLE DE LARGEUR 3 A L'AIDE DE TRIMINOS

G. KREWERAS*

RÉSUMÉ - *On établit une récurrence du 6-ième ordre pour le nombre de recouvrements d'un rectangle de largeur 3 et de longueur n à l'aide de "triminos". Des problèmes analogues peuvent se poser à propos de découpages électoraux.*

SUMMARY - Tiling of a rectangle of widht 3 with "triminoes".
A recurrence of order 6 is derived for the number of tilings of a rectangle of width 3 and lenght n *with "trimimoes". Such problems may occur in connection with grouping of voting constituencies.*

DÉFINITIONS

Le présent travail utilise la notion de polyomino, qui a été abondamment étudiée notamment par Golomb [1], [2] et par Klarner [3], ainsi que par l'équipe du LabRI de Bordeaux [4].

Les polyominos d'aire 3 (parfois appelés *triminos*) sont de deux formes distinctes, que nous appellerons des *équerres* et des *triolets* (figure 1).

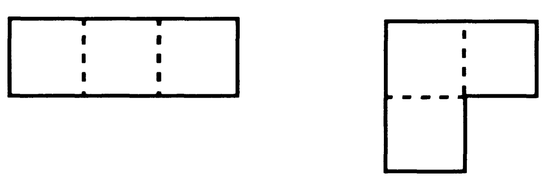


Figure 1

Nous nous servirons de n d'entre eux pour recouvrir un rectangle de côtés 3 et n, disposé de manière que les côtés 3 occupent les positions gauche et droite et que les côtés n occupent les positions haute et basse, et nous noterons r_n le nombre de recouvrements distincts possibles.

Nous poserons par convention $r_0 = 1$. Il est trivial de remarquer que $r_1 = 1$ (recouvrement par un triolet vertical unique, et que $r_2 = 3$ (1 recouvrement possible par deux triolets verticaux et 2 recouvrements possibles par deux équerres, figure 2).

* 40, rue Lacépède, 75005 Paris.

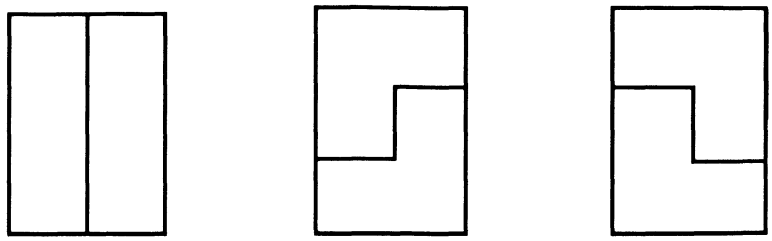


Figure 2

Nous dirons qu'un recouvrement est *indécomposable* s'il est impossible de placer une ligne verticale à une distance p du bord gauche et à une distance q du bord droit ($p + q = n$) qui ne *coupe* aucun des n triminos (ligne de "séparation"). Dans le cas $n = 2$, seuls les deux recouvrements à l'aide d'équerres sont indécomposables.

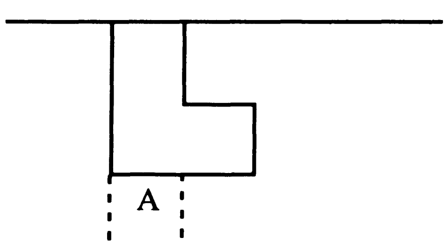
Pour calculer r_n, il est commode de déterminer d'abord le nombre s_n de recouvrements indécomposables. On posera de nouveau par convention $s_0 = 1$, et l'on a déjà vu que $s_1 = 1$ et que $s_2 = 2$.

CALCUL DE s_n POUR $n > 2$.

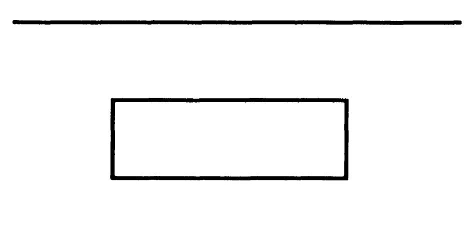
Si $n = 3$, il est facile de s'assurer qu'il y a 5 recouvrements indécomposables, comportant soit un seul triolet horizontal (le long d'un bord), ce qui donne deux solutions pour le bord haut et deux pour le bord bas, soit 4 en tout, à quoi il faut ajouter le recouvrement à l'aide de trois triolets horizontaux. D'où $s_3 = 5$.

Cas où $n > 3$.
1°) Il y a forcément une équerre adossée au bord gauche (et de même au bord droit). En effet si ce n'était pas le cas, la case centrale du bord gauche appartiendrait à un triolet et le recouvrement serait décomposable puisqu'il commencerait soit par un triolet vertical soit par un carré recouvert par trois triolets horizontaux.

2°) Il ne peut y avoir d'équerre ailleurs. En effet si une case non-extrême de la bande centrale est la case angulaire d'une équerre, celle-ci constitue, avec le trimino couvrant la case restée libre au-dessus ou au-dessous d'elle (case A de la figure 3), une barrière séparant le rectangle en deux parties dont les superficies doivent être multiples de trois. Il est facile de s'assurer que cela n'est possible qu'en couvrant A avec un triolet horizontal qui complète la ligne de séparation verticale amorcée par le bord de l'équerre.



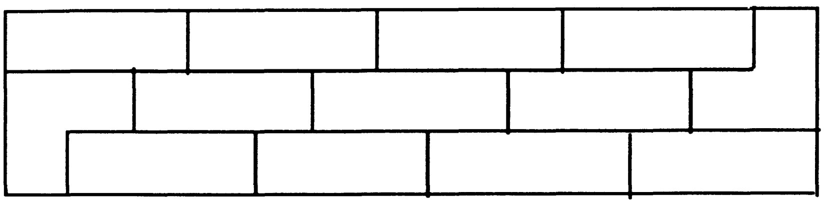
configuration impossible



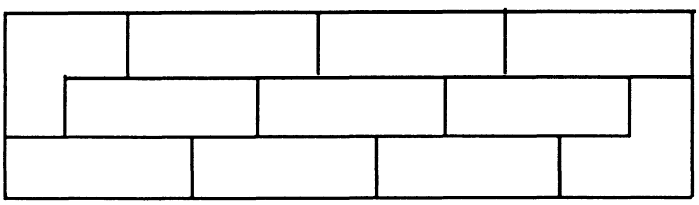
configuration obligatoire

Figure 3

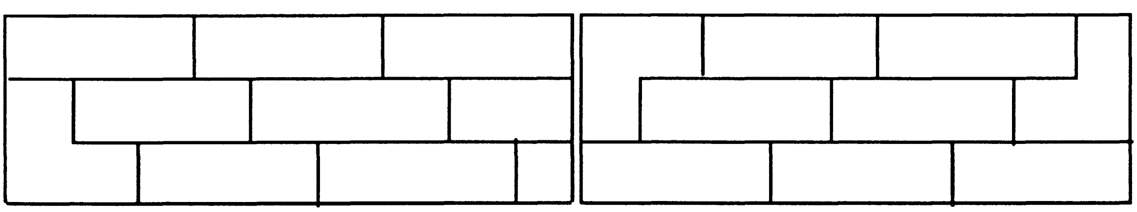
3°) Il résulte du 1°) et du 2°) que dans tout recouvrement indécomposable la rangée centrale ne peut être recouverte, en dehors d'une ou deux cases à gauche et d'une ou deux cases à droite, que par des triolets horizontaux ; il en est donc de même pour les rangées du haut et du bas. Il y a lieu alors de distinguer suivant que n est égal à 0, 1 ou 2 *modulo* 3. La figure 4 permet de comprendre pourquoi il y a deux solutions si $n = 3k+1$ ou si $n = 2k+2$, mais quatre si $n = 3k$.



$n = 3k+1 \quad (k = 4)$



$n = 3k+2 \quad (k = 3)$



$n = 3k \quad (k = 3)$

Figure 4

4°) La suite des valeurs de s_n est donc finalement

pour n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
s_n =	1	2	5	2	2	4	2	2	4	2	2	...

CALCUL DE r_n

Il peut s'effectuer de proche en proche à partir de la remarque que tout recouvrement qui n'est pas lui-même indécomposable "se termine à droite" par un recouvrement indécomposable plus ou moins large. D'où il résulte que :

$$\begin{aligned} r_2 &= s_2 + s_1 r_1 \\ r_3 &= s_3 + s_2 r_1 + s_1 r_2 \\ r_4 &= s_4 + s_3 r_1 + s_2 r_2 + s_1 r_3 \end{aligned}$$

etc.

En introduisant les fonctions génératrices respectives $S(t)$ et $R(t)$, ceci exprime que pour $n > 0$ le coefficient de t^n est le même dans $R(t)$ que dans $[St) - 1]\, R(t)$, d'où finalement

$$R(t) = [2 - S(t)]^{-1}$$

Or $S(t)$ se déduit immédiatement de la périodicité des s_n compte tenu des irrégularités du début :

$$S(t) = [1 + t + 2t^2 + 4t^3 + t^4 \quad - t^6]\,[1 - t^3]^{-1}$$

Il en résulte que

$$R(t) = [1 - t^3][1 - t - 2t^2 - 6t^3 - t^4 \quad + t^6]^{-1}$$

Ceci permet notamment de former très rapidement la suite des valeurs numériques des r_n (au-delà des irrégularités du début) grâce à la récurrence.

$$r_n = r_{n-1} + 2r_{n-2} + 6\, r_{n-3} + r_{n-4} \quad - r_{n-6}.$$

La suite est finalement

n	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
r_n	=	1	3	10	23	62	170	441	1173	3127	8266	21937	...

Le rapport de deux termes successifs tend vers une limite voisine de 2,65.

MOTIVATION

Le problème résolu ci-dessus peut être regardé comme un tout premier pas vers une étude méthodique des "découpages électoraux" nécessaires pour les scrutins à plusieurs degrés. Les cases de l'aire à recouvrir symbolisent des circonscriptions dont chacune élit un représentant à la majorité ; chaque trimino constitue un groupement de trois circonscriptions, et les élus de ces groupements forment le collège qui élira un représentant de l'ensemble.

Il peut notamment arriver qu'un tel mode d'élection donne un résultat différent de celui qui résulterait d'une élection directe. Une des illustrations les plus élémentaires est fournie par le cas $n = 3$ traité ci-dessus, si les neuf cases sont par exemple cinq acquises au parti *bleu* et quatre acquises au parti *rouge*. L'élection directe donnerait alors la majorité aux *bleus*.

Si le découpage en trois triminos était fait *a priori*, et que les quatre cases rouges étaient déterminées par le hasard (de façon équiprobable), le scrutin à deux degrés provoquerait une "inversion de majorité" chaque fois que les quatre cases rouges apparaîtraient à deux dans un trimino et également à deux dans un autre, le troisième étant alors entièrement bleu. Il est facile de voir que sur les 126 possibilités pour la disposition des cases rouges (126 est le binomial de 9 et de 4), 27 seulement posséderaient cette propriété. Il y aurait donc inversion de majorité dans environ 21% des cas, ce qui n'est déjà pas négligeable.

Mais supposons par contre que les emplacements des quatre cases rouges soient connues d'avance de celui qui choisit le découpage parmi les 10 possibles (puisque $r_3 = 10$). Alors s'il désire favoriser le parti minoritaire, il est naturel de se demander s'il peut le faire.

La réponse est que sur les 126 cas possibles quant à la disposition des rouges il y en a cette fois 109 (c'est-à-dire environ 86%) pour lesquelles il peut effectivement provoquer une inversion de majorité.

Les 17 cas où l'inversion de majorité est impossible sont résumés par la figure ci-dessous :

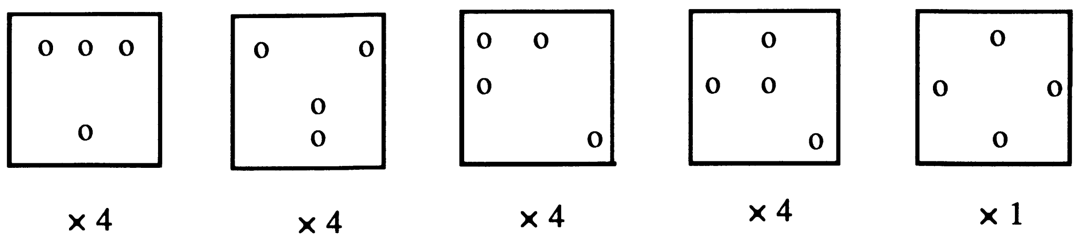


Figure 5

Bien entendu l'exemple développé ici est extrêmement loin de tout espèce de réalisme. Pour s'en rapprocher il serait notamment nécessaire de savoir calculer d'abord le nombre de manières dont un rectangle général d'aire *ab* pourrait être recouvert à l'aide de *a* polyominos d'aire *b*.

(Un exemple particulièrement frappant de deux partitions correspondant à $a = 9$ et $b = 5$ est mentionné dans [5]. On y voit une certaine localisation d'un parti minoritaire assuré de 21 circonscriptions (contre 24), qui pourrait donc s'attendre à n'avoir que 4 sièges (contre 5), et qui réussit grâce à un découpage d'apparence presque plausible non seulement à devenir majoritaire, mais à l'emporter *par 7 sièges contre 2*).

Par la suite on pourrait songer à généraliser aux partitions d'un graphe connexe plus général de *ab* sommets en *a* graphes partiels connexes de *b* sommets.

Il y a donc du pain sur la planche. Mais l'analyse de tels problèmes, pas forcément faciles, par le mathématicien ou l'informaticien va tout naturellement de pair avec la réflexion du citoyen sur certaines procédures démocratiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLOMB, S.W., *Polyominoes*, New York, Scribner, 1965.
[2] GOLOMB, S.W., "Tiling with polyominoes", *J. Comb. theory*, 1, 1966, 280-296.
[3] KLARNER, D.A., "Packing a rectangle with congruent N-ominoes", *J. Comb. Theory*, 7,2, 1969, 107-115.
[4] DELEST, M., "Polyominoes and Animals : some recent results", *J. Math. Chemistry*, 8, 1991, 3-18.
[5] COTTERET, J.-M., EMERI, C., *Les systèmes électoraux*, Paris, Presses Universitaires de France, 1983, p. 32.