

NOËL BONNEUIL

PATRICK SAINT-PIERRE

**Domaine de victoire et stratégies viables chez les pêcheurs  
décrits par l'anthropologue Fredrik Barth**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 142 (1998), p. 43-66

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1998\\_\\_142\\_\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1998__142__43_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DOMAINE DE VICTOIRE ET STRATÉGIES VIABLES CHEZ LES PÊCHEURS DÉCRITS PAR L'ANTHROPOLOGUE FREDRIK BARTH

Noël BONNEUIL\* et Patrick SAINT-PIERRE\*\*

**RÉSUMÉ** — *L'anthropologue Fredrik Barth a analysé l'émergence des formes sociales chez les pêcheurs norvégiens. Sa perspective est bien modélisée par les outils mathématiques de la théorie de la viabilité, grâce auxquels on peut calculer l'ensemble des états à partir desquels la survie du système est encore possible, ainsi que la bonne décision à prendre à chaque instant, entre explorer ou suivre les autres bateaux. En outre, il se trouve que, techniquement, la condition de compacité des images de la correspondance décrivant le processus de décision n'est pas satisfaite pour pouvoir appliquer tel quel le théorème de viabilité. Cette difficulté est levée dans le cadre de ce modèle des pêcheurs, et l'algorithme de calcul est explicité.*

**SUMMARY** — *Viable strategies among fishermen analysed by the anthropologist Fredrik Barth.*

*The anthropologist Fredrik Barth analysed the social forms generated among Norwegian fishermen. His view is well rendered by the mathematical tools of viability theory. The largest set of states from which economic survival is still possible is calculated, as well as the right decision to take at each moment, between risk-taking and following the other vessels. Moreover, the technical condition that the image of the correspondence describing the process at work must be compact, is violated. We deal with this difficulty and we present the algorithm.*

### 1 INTRODUCTION

En sciences sociales ou en biologie, les systèmes sont rarement déterministes ou prévisibles. Les agents sont souvent myopes, ils n'ont pas toute liberté d'action, mais disposent d'une certaine marge de manœuvre, grâce à laquelle ils peuvent essayer d'influencer le système et lui éviter sa perte. Prévoir le devenir d'un système est souvent moins important que de savoir comment l'influencer de manière à ce qu'il se perpétue. La viabilité des systèmes dynamiques a fait l'objet d'une approche théorique systématique de la part de J.-P. Aubin ([4]). Les utilisations de cette théorie renouvellent les traitements traditionnels, où l'inconnu est souvent comblé par des fonctions a priori, à caractère probabiliste ou endogène, où le comportement étudié correspond à la maximisation de quelque critère.

---

\*CAMS-École des hautes études en sciences sociales, 54, Bld Raspail, 75006, Paris, et Institut national des études démographiques, 133, Bld Davout, 75980, Paris cedex 20.

\*\* : Centre de recherche viabilité, jeux, contrôle, Université de Paris IX Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75016, Paris, France.

En viabilité, la seule spécification des contraintes suffit à délimiter l'ensemble des trajectoires qui sauvegardent le système. Par exemple, en économie, Aubin ([4], [2]) relit en termes de viabilité la convergence vers l'équilibre au sens de Walras. Cartelier et Müllers ([17]) introduisent les notions de viabilité dans un modèle Keynésien. Bonneuil ([12]) détermine les systèmes viables population-ressources. Dans ([13]), les changements soudains de fécondité depuis 1931 dans les pays occidentaux sont bien rendus par la considération de noyaux de viabilité d'une dynamique économique. En dynamique des populations, Bonneuil et Müllers ([14]) déterminent le domaine de coexistence et les noyaux de viabilité de la proie et du prédateur dans le cas d'interactions inconnues. En génétique des populations, Bonneuil ([11]) détermine l'ensemble des sentiers démographiques capables de produire l'hétérogénéité génétique observée dans un échantillon d'ADN mitochondrial.

Dans ces applications, le noyau de viabilité est calculable, soit sous forme analytique, soit en résolvant des équations différentielles. Ce n'est pas toujours le cas. Dans ([11]) par exemple, la détermination du noyau de viabilité et de l'ensemble des états atteignables à partir d'un état donné nécessitent une approximation numérique. Or, dans ce dernier exemple, la dynamique n'est pas « à image compacte », une des conditions requises pour appliquer les théorèmes classiques de la théorie de la viabilité. Nous saisissons donc l'exemple suggéré dans ([11]) pour montrer l'intérêt de la viabilité et pour traiter ce cas d'image non compacte.

## 2 L'ORGANISATION DES PÊCHEURS SELON FREDRIK BARTH

### 2.1 Décision et viabilité

Barth[6] montre l'émergence de formes sociales à partir des interactions individuelles. Il assimile ces formes à des équilibres sociaux tels qu'on les définit en Théorie des Jeux. Bonneuil[11] montre que les processus dont parle Barth se situent par construction hors équilibre, et que les « équilibres » mentionnés sont en fait des noyaux de viabilité. Deux textes de Barth sont particulièrement discutés, celui portant sur *Nomads of South Persia* [7], et celui des pêcheurs norvégiens ([6]). Dans le premier, les nomades ont la liberté de réduire leur consommation ou de sédentariser en partie afin d'assurer un revenu minimum à chacun des nomades restants. Bonneuil ([11]) dresse le portrait de phase et détermine le noyau de viabilité, en traçant les ensembles atteignables en chacun des points de l'espace d'états. Dans la seconde étude, la dimension trois du problème nécessite un traitement numérique qui soulève des difficultés que nous proposons d'analyser et de résoudre ici.

Barth veut comprendre pourquoi les bateaux de pêche se regroupent « sur de petites surfaces d'une mer immense potentiellement abondante » ([6], p. 46). Il montre que l'enjeu à moyen terme de la pêche est moins la prise effective de poissons que la réputation du capitaine : « la qualité de l'équipage pour la saison suivante variera en accord avec la réputation du capitaine. Comme la qualité de l'équipage est un facteur important du succès mesuré en volume de prise, dont sont déduits les profits du capitaine, la relation entre capitaine et équipage est convertie en une continue relation de négociation » ([6], p. 42).

Le capitaine décide à tout moment s'il doit imiter les autres bateaux ou chercher seul. Prendre le risque de chercher seul hypothèque la confiance que les marins accordent au capitaine, tandis qu'imiter limite la perte à celle des autres bateaux. C'est pourquoi « la plus grande partie de l'attention est consacrée à découvrir les mouvements des *bateaux*, et la majeure partie du temps est passée à poursuivre d'autres bateaux pour des rendez-vous imprévus et infructueux » ([6], p. 46).

Pour garder ou attirer les meilleurs marins, qui sont libres de choisir leurs employeurs, le capitaine doit prendre « continuellement » des décisions alors que « le moment et le lieu d'apparition » des bancs de hareng sont « imprévisibles » ([6], p. 41). Ces décisions découlent d'une évaluation subjective des chances de succès, elles-mêmes liées à la mer, à la compétence des hommes, à l'expérience et à la réussite du capitaine. Une trop longue série de mauvaises décisions mène à la ruine, et la population de pêcheurs se renouvelle par un processus de sélection naturelle, caractérisé par la sortie des marins ruinés allant s'employer ailleurs, ou de l'entrée de nouveaux patrons de pêche ayant réuni un financement suffisant.

## 2.2 Modélisation

Bonneuil ([11]) modélise le processus de prise de décision des pêcheurs norvégiens. Il cherche notamment quels enchaînements de décisions garantissent la survie économique d'un équipage, et quels autres mènent à la ruine.

Le capital dont dispose un capitaine  $i$  au temps  $t$  varie au rythme des prises. Il sert à rémunérer les marins et le chef de file. Le capitaine choisit avec la probabilité  $1 - u_i(t)$  de pêcher aux endroits connus, où le volume espéré de prise est  $y(t)$ , ou bien il choisit avec la probabilité  $u_i(t)$  de tenter sa chance sur des sites inexplorés. La *pire perte* consiste à ne rien prendre à partir de l'instant  $t_0$  de prise de décision jusqu'à l'épuisement du capital. Chaque sortie en mer a un coût qui peut varier par exemple si le filet est perdu, mais qui peut être considéré en première approximation comme ayant un flux fixe  $c$ . La pire perte  $z_i(t)$  varie donc comme :

$$z'_i(t) = c - (1 - u_i(t))y(t) \quad (1)$$

La probabilité moyenne d'explorer est  $u(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t)$ . La perte moyenne est  $z(t) \doteq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i(t)$ , elle satisfait :

$$z'(t) = c - (1 - u(t))y(t) \quad (2)$$

Le volume espéré de prise sur les sites connus diminue avec le nombre de pêcheurs  $N(1 - u(t))$  qui l'exploitent, et avec le taux de prise d'exploitation  $\alpha$  (la fraction de poissons pêchés parmi ceux du banc présent) (« en étant là où apparaît le hareng, on a une bonne chance de faire pleine prise, tandis que, en raison de la taille et du comportement des bancs, les retardataires aux lieux de jets de filets n'auront rien » ([6], p. 41)) :

$$y'(t) = -\alpha N(1 - u(t))y(t) \quad (3)$$

A l'échelle de cette pêche, il n'est pas nécessaire de tenir compte du renouvellement naturel de la population de poissons, comme on le fait pour les pêches modernes

([1]). Toutefois, la linéarité de  $y'$  et de  $z'$  par rapport à  $y$  n'est pas une nécessité d'ordre méthodologique pour utiliser l'algorithme de viabilité.

Les chances de succès du capitaine, que celui-ci en soit conscient ou non, dépendent de la probabilité  $p(t)$  que personne ne découvre un volume de prise supérieur au volume  $y(t)$  connu à la date  $t$ . Si  $Y(t)$  désigne la variable aléatoire « volume de prise », la probabilité que le volume de prise soit inférieur à un certain niveau  $y$  est une fonction  $\Phi(\cdot)$  telle que

$$P(Y < y) = \Phi(y) \quad (4)$$

Toute fonction  $\Phi$  spécifiée monotone croissante peut être utilisée, mais, pour permettre des calculs commodes, nous considérons une loi exponentielle pour la densité de  $Y$ , soit :

$$\Phi(y) = 1 - e^{-\lambda y} \quad \lambda > 0 \quad (5)$$

Cette fonction  $\Phi$  reflète la richesse halieutique du milieu, qui augmente quand  $\lambda$  diminue.

Le choix de chercher ou de suivre, formalisé par  $u(t)$ , dépend du comportement des autres capitaines, comme nous l'avons vu : si tout le monde cherche, on a intérêt à profiter de la recherche collective pour suivre le capitaine le plus chanceux. Une fois le choix de chercher ou de suivre effectué entre  $t$  et  $t + dt$ , chacun des  $Nu(t)$  capitaines chercheurs cherche indépendamment des autres. Le choix est individuel, mais contraint par ceux des autres, de manière à être viable au niveau individuel. La rétroaction induite par le souci de rester viable fait entrer les choix des autres capitaines et les contraintes collectives dans la décision individuelle. C'est ce dont Barth parle, à notre avis, à la différence d'un processus de décision relevant d'interactions pré-spécifiées entre capitaines. Dans les jeux statiques, les joueurs règlent leurs tactiques sur les coups ou sur les tactiques possibles des autres. Ici, en jeu dynamique, les joueurs (les capitaines de bateaux) modifient leurs tactiques en permanence en fonction du contexte changeant, des tactiques des autres, et de la cible à atteindre. Ce ne sont que des considérations de viabilité qui rendent les capitaines dépendants les uns des autres dans leur choix de chercher ou de suivre, mais, une fois prise la décision de partir en exploration, la recherche est indépendante.

La probabilité  $p(t + dt)$  de ne pas découvrir de prise supérieure au meilleur volume  $y(t)$  connu à  $t$  sur l'ensemble des sites déjà explorés est donc un produit de probabilités d'évènements indépendants :

$$p(t + dt) = p(t) (\Phi(y(t)))^{Nu(t) dt} \quad (6)$$

(le terme  $(\Phi(y(t)))^{Nu(t) dt}$  représente la probabilité d'échouer à trouver mieux).

La loi d'évolution de  $p(t)$  s'écrit :

$$p'(t) = p(t) Nu(t) \ln(\Phi(y(t))) \quad (7)$$

A l'instant  $t = 0$ , la probabilité de ne pas trouver de meilleure prise est  $p(0) = p_0$ . Elle n'est pas forcément connue du capitaine. C'est son expérience qui lui permet de l'évaluer au mieux, si toutefois il l'évalue. Cette probabilité reflète les possibilités de

la mer, elle conditionne les chances de survie du capitaine de pêche. Posons :

$$x = (z, y, p) \quad \text{et} \quad f(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} c - (1 - u(t))y(t) \\ -\alpha N(1 - u(t))y(t) \\ p(t)Nu(t) \ln(\Phi(y(t))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'(t) \\ y'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Le système dynamique peut être décrit par l'inclusion différentielle :

$$x'(t) \in F(x(t)) = \{f(x(t), u), u \in [0, 1]\} \quad (9)$$

L'ensemble des contraintes d'état pour chaque capitaine est :

$$K \doteq \{x = (z, y, p) \mid z \leq 0, y \geq 0, p \in [0, 1]\} \quad (10)$$

Le capitaine se situe à chaque instant  $t_0$  dans un processus de pire perte  $\{(1), (3), (7)\}$  dont il a intérêt à ce que la commande  $u(t) \in [0, 1]$ ,  $t > t_0$  (la participation moyenne à la recherche) ne le mène à la ruine  $z_i(t) \geq 0$  qu'avec une probabilité inférieure ou égale à un certain seuil,  $p_s \doteq 5\%$  par exemple. Il s'agit donc pour lui d'atteindre la cible :

$$C \doteq \{x = (z, y, p) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \times [0, p_s]\} \quad (11)$$

Le capitaine  $i$  est donc tributaire du comportement des autres tandis que son intérêt personnel est de rendre viable la commande  $u(t)$  qui est collective. Il s'efforce de rendre la commande collective  $u$  viable, bien qu'il n'agisse que sur  $u_i$ . Une meilleure solution serait de coopérer, mais ce n'est pas le cas. Il ne s'agit pas d'intellectualiser le comportement du capitaine, en prétendant qu'il calcule des commandes afin d'atteindre  $C$ . Nous proposons de le considérer comme un preneur de décisions à chaque instant (suivre ou s'aventurer), à partir de son observation de la mer, du mouvement des autres bateaux, de son libre arbitre. Il est alors pris dans une dynamique, dont nous explorons ici la mathématique, qui se traduit concrètement par la menace à chaque instant de prendre moins de poissons que les concurrents, menace bien plus présente que celle de ne pas en prendre assez dans l'absolu.

Si tout le monde imite en pêchant dans des endroits déjà connus, le stock de poissons s'épuise. À l'inverse, si tout le monde prend des risques, les capitaines bre douilles perdent les meilleurs marins au profit des capitaines chanceux. Aucune des stratégies pures, imiter ou risquer, n'est donc *évolutionnairement stable*. Au bout d'un certain temps, un déviant de l'une des stratégies est gagnant : si tout le monde reste sur les stocks connus qui finissent par s'épuiser, un déviant preneur de risque a de plus en plus de chances de faire mieux ; si tout le monde prend des risques, un déviant suiviste minimisera ses pertes et son capital de confiance ne souffrira pas trop.

La population de pêcheurs se comporte comme un joueur utilisant un mélange des stratégies « imiter » et « risquer ». Une stratégie « mal mélangée » est éliminée, par la ruine des pêcheurs qui la maintiendraient jusqu'au bout de leurs moyens. La stratégie qu'on observe et qui peut varier avec les conditions du milieu ou les moyens mis en œuvre par les pêcheurs est le dosage gagnant produit par l'évolution : cette stratégie mélangée est « évolutionnaire » (voir [3], p. 394, [20]).

La nécessité est moins de maximiser le profit que de survivre. Cela vient évidemment du fait que la découverte des bancs et le volume des prises sont aléatoires. Les moyens de contrôler ce hasard consistent d'une part à ce que les meilleurs marins soient affectés aux meilleurs capitaines preneurs de risques, c'est le processus de transactions que Barth met en lumière, et d'autre part, à ce que le nombre attendu de preneurs de risques  $Nu(t)$  soit tel qu'il préserve chaque capitaine de la ruine.

Nous retrouvons un problème de viabilité sous-jacent au processus de transactions entre pêcheurs : pour chaque capitaine, contribuer à ce qu'à tout instant  $t$  la « probabilité moyenne de faire de la recherche »  $u(t)$  lui permette d'éviter la ruine. Cette éventualité est toujours présente, du simple fait que les concentrations de poissons déjà trouvées s'épuisent plus rapidement qu'elles ne se renouvellent, et que la découverte de bancs plus abondants reste aléatoire. En d'autres termes,  $u(t)$  doit être à tout instant *viable* au sens où la ruine d'un capitaine donné doit être peu probable. Le capitaine  $i$  peut contribuer à rendre cette moyenne  $u(t)$  viable en modifiant sa propre commande  $u_i(t)$ .

Ce qui intéresse le capitaine  $i$  est de rester dans le domaine de victoire  $\text{Vict}_F(K, C)$ , représenté sur la figure 1.<sup>1</sup>

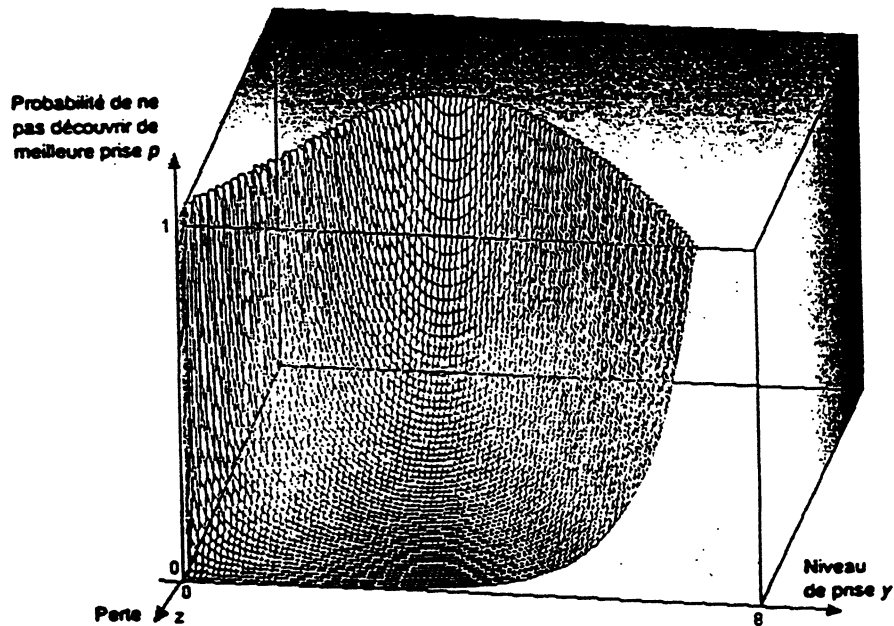


FIG. 1 – *Domaine de victoire de  $F$   $\text{Vict}_F(K, C)$ . De tout point de cet ensemble, il existe au moins une trajectoire qui atteint la cible  $z = 0, p \in [0, 5\%]$ .*

– Toutes les trajectoires issues d'un point *en dehors* de  $\text{Vict}_F(K, C)$  atteignent

1. Numériquement, cette figure correspond à  $\Phi$  fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 0.4,  $z_0 = -40$ ,  $y(0) = 10$ ,  $p(0) = 1$ ,  $c = 3$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $N = 1..$

la ruine avec une probabilité  $p$  de ne pas trouver de meilleure prise, supérieure au seuil critique, quelle que soit la stratégie utilisée.

- Tant qu'on reste à l'intérieur de  $\text{Vict}_F(K, C)$ , toutes les stratégies possibles  $u_i \in [0, 1]$  sont viables. La correspondance qui associe à tout état  $(z, y, p)$  l'ensemble des stratégies viables est, par définition, la loi de régulation  $R(z, y, p) = [0, 1]$ .
- Sur le bord de  $\text{Vict}_F(K, C)$ , seulement certaines stratégies sont viables. La loi de régulation est :

$$R(x) = \{u \in [0, 1] \mid f(x, u) \in T_{\text{Vict}_F(K, C)}(x)\} \quad (12)$$

où  $T_{\text{Vict}_F(K, C)}(x)$  est le cône contingent en  $x$  au domaine de victoire  $\text{Vict}_F(K, C)(x)$ , que nous définirons plus loin, en 18. Le graphe de la commande approchée est représenté sur les figures 2 et 3.

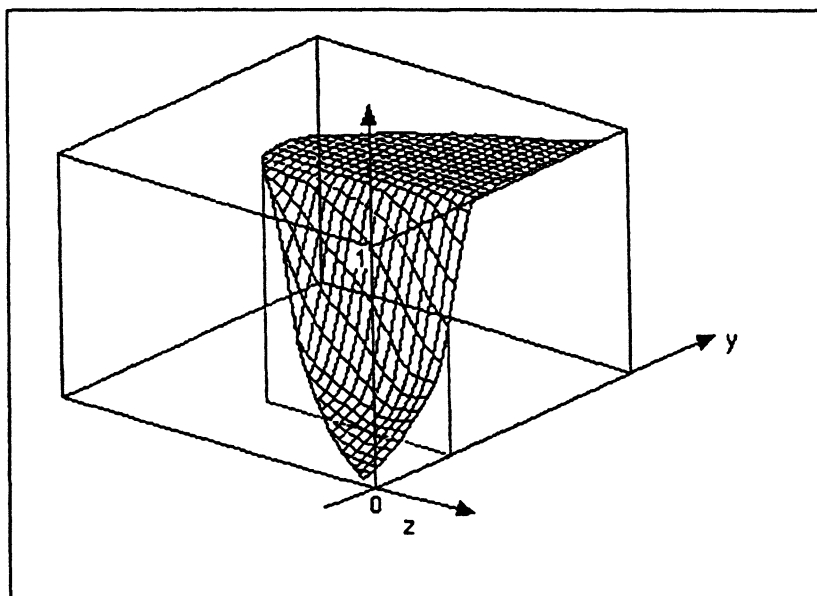


FIG. 2 - Graphe de la commande viable sur le bord du domaine de victoire : à tout état  $(z, y, p(z, y))$  sur le bord du domaine de victoire de  $F$ , la loi de régulation associe la commande viable  $u(z, y)$ . En dehors du graphe représenté, la loi de régulation en  $(z, y)$  est  $[0, 1]$ .

La figure 4 montre que le domaine de victoire varie régulièrement lorsque la richesse du milieu, reflétée par la fonction  $\Phi$ , varie. De même, faire varier le seuil définissant la cible (5 % jusqu'à maintenant) ne donne pas de résultats surprenants, le domaine de victoire augmente régulièrement avec le seuil.

Dans la suite, nous clarifions les techniques utilisées pour calculer le domaine de victoire et la loi de régulation. La condition d'images compactes n'étant pas vérifiée (voir proposition 4.1 ci-après), les théorèmes de viabilité ne peuvent pas être appliqués tels quels. Nous allons montrer que le domaine de victoire cherché à  $y \geq 0$  est limite de domaines de victoires à  $y \geq y_{\min} > 0$  quand  $y_{\min}$  tend vers 0.



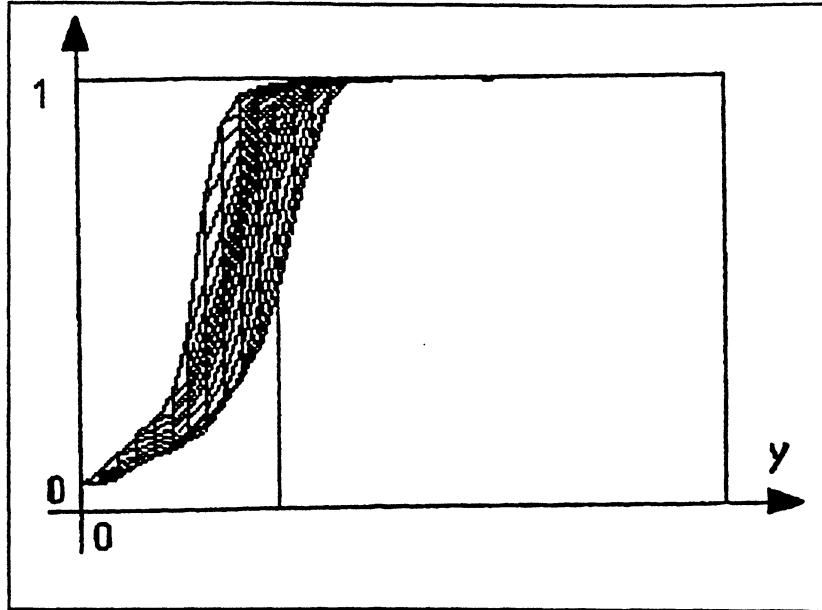


FIG. 3 – Graphe d'une sélection viable de la commande  $u$  : coupe dans le plan  $z = 3$ .

Nous expliciterons la loi de régulation (paragraphe 4.4), et nous donnerons également des exemples de trajectoires viables à proximité de la frontière de viabilité.

### 3 INCERTITUDE ET VIABILITÉ EN SCIENCES SOCIALES

#### 3.1 Notions de viabilité

Un système dynamique occupant un état  $x(t) \in X = \mathbb{R}^n$  à l'instant  $t$  et pouvant être commandé au moyen d'une commande  $u \in U$  évolue selon la fonction :

$$f : X \times U \rightarrow X : \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

L'enjeu est le maintien du système dans un ensemble fermé donné  $K$  :

$$x(t) \in K, \quad \forall t \geq 0 \quad (14)$$

Il s'agit de déterminer l'ensemble des états à partir desquels il est possible de trouver une solution  $x(\cdot)$  de (13) restant dans  $K$  pour tout  $t \geq 0$ . De tels états sont dits *viables* dans  $K$ . De même, les commandes  $u(t)$  qui, à l'instant  $t$ , permettent ce maintien dans  $K$  à toute date ultérieure sont des *commandes viables*. L'ensemble  $R(x)$  des commandes viables en  $x$  constitue la *loi de régulation* du système (13) contraint par (14).

Les possibilités d'évolution du système commandé (13) sont nombreuses, on fait l'hypothèse simplement qu'elles appartiennent à l'ensemble :

$$F(x) = \{f(x, u), u \in U\} \quad (15)$$

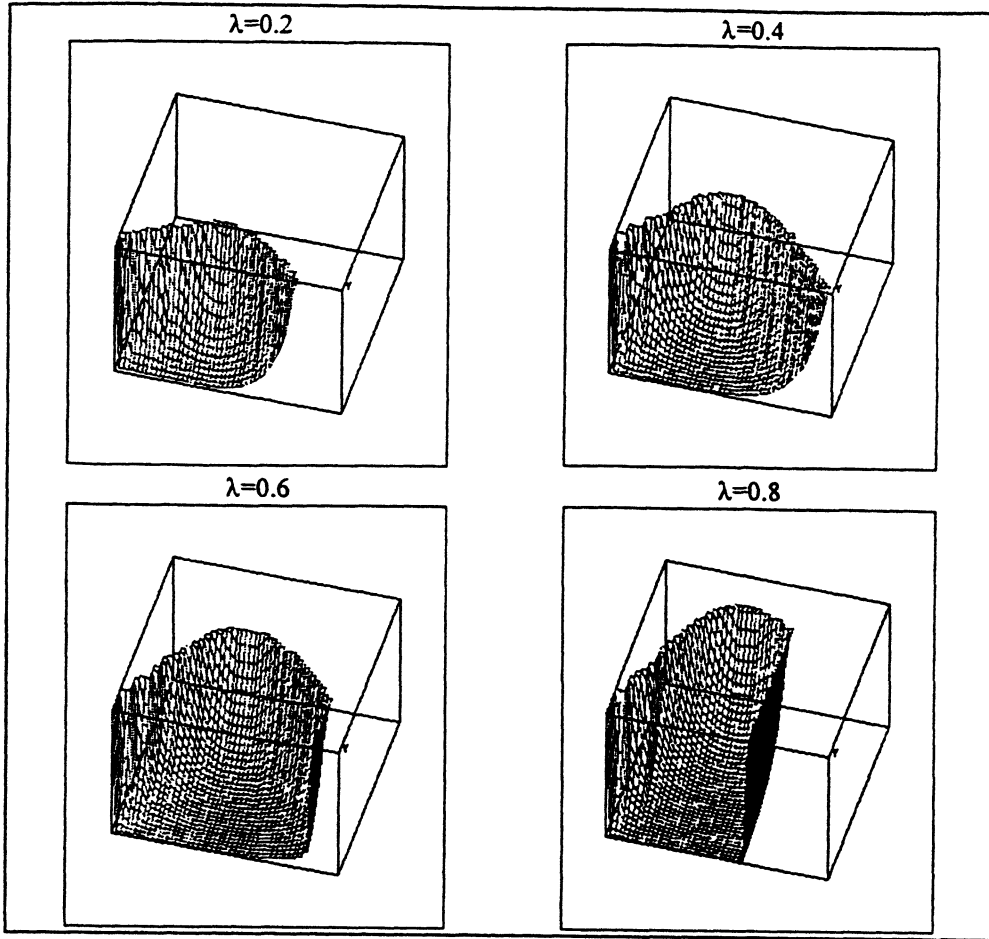


FIG. 4 – Variation du domaine de victoire pour  $\Phi(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$  variant avec  $\lambda = 0.1$  à  $0.7$  par pas de  $0.2$ .

Le système dynamique sous contraintes s'écrit plus synthétiquement :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \\ x(t) \in K \end{cases} \quad (16)$$

Aux équations différentielles usuelles, de la forme  $x'(t) = f(x(t))$ , nous substituons donc l'inclusion différentielle (16), qui prend en compte les devenirs possibles par la condition  $u \in U$ .

On note  $S_F(x)$  l'ensemble des solutions de (16) issues de  $x$  :

$$S_F(x) = \{y(\cdot) \mid y(0) = x \text{ et } y'(t) \in F(y(t)), \text{ p.p. tout } t > 0\} \quad (17)$$

Défini par G. Bouligand dans les années trente, le cône contingent  $T_K(x)$  au point  $x$  étend la notion de plan tangent. Ce cône est l'ensemble des  $v \in X$  tels qu'il existe des suites  $h_n \rightarrow 0_+$  et  $v_n \rightarrow v$  telles que pour tout  $n \geq 0$ ,  $x + h_n v_n \in K$ . Il s'écrit encore comme l'ensemble des directions  $v$  telles que :

$$\liminf_{h \rightarrow 0_+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0 \quad (18)$$

où  $d_K(x) = \inf_{z \in K} \|z\|$ . Si  $K$  est convexe,  $T_K$  l'est également, et coïncide avec la fermeture du cône engendré par  $K - x = \{z \mid \exists y \in K \text{ tel que } z = y - x\}$  ([3], p. 273).

Le cône tangent de Dubovitsy-Miliutin  $D_K(x)$  à  $K$  en  $x$  est défini par :

$$D_K(x) := \{v \mid \exists \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad x + ]0, \alpha[ (v + \varepsilon B) \subset K\} \quad (19)$$

où  $B$  désigne la boule unit.  $D_K(x)$  est le complémentaire du cône contingent au complémentaire de  $K$  en  $x$ .

Un ensemble  $K$  est un *domaine de viabilité* si et seulement si, de tout point  $x_0 \in K$ , il existe au moins une solution viable sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  de l'inclusion différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) & \text{p.p. tout } t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (20)$$

qui reste dans  $K$  pour tout  $t \geq 0$ . Bebernes & Schuur [8] ont montré que la viabilité d'un ensemble fermé  $K$  est assurée si et seulement si une condition locale faisant appel au cône contingent est vérifiée.

On considère une correspondance  $F$  satisfaisant les propriétés de Marchaud, c'est-à-dire semi-continue supérieurement, à images convexes compactes non vides, et telle qu'il existe une constante positive  $c$  vérifiant :

$$\forall x \in K, \sup_{y \in F(x)} \|F(x)\| \leq c(\|x\| + 1) \quad (21)$$

**THÉORÈME 3.1** ([8]) *Soit  $F : X \rightarrow X$  une correspondance satisfaisant les propriétés de Marchaud. Soit  $K \subset \text{Dom}(F)$  un ensemble fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'ensemble  $K$  est un domaine de viabilité ;*
2. *Tout élément de l'ensemble  $K$  vérifie la condition tangentielle :*

$$\forall x \in K, F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \quad (22)$$

3. *Tout élément de l'ensemble  $K$  vérifie la condition tangentielle :*

$$\forall x \in K, F(x) \cap \overline{\text{co}}T_K(x) \neq \emptyset \quad (23)$$

où  $\overline{\text{co}}(A)$  désigne l'adhérence du convexe d'un ensemble  $A$ .<sup>2</sup>

Cette dernière condition est dite *condition relaxée de viabilité* (voir [19]).

Il n'y a aucune raison pour qu'un ensemble  $K$  soit un domaine de viabilité. On cherche alors les domaines de viabilité de  $K$ . Aubin [4] montre que, lorsque  $F$  satisfait les propriétés de Marchaud et  $K$  fermé, il existe un plus grand domaine de viabilité fermé contenant tous les autres. On l'appelle le *noyau de viabilité de  $K$  pour  $F$*  et on le note  $\text{Viab}_F(K)$ .

---

2. « Soit  $A$  un sous-ensemble d'un espace fermé  $E$ . On appelle enveloppe convexe  $\text{co}(A)$  de  $A$  l'intersection de tous les ensembles convexes contenant  $A$  et enveloppe convexe fermée  $\overline{\text{co}}(A)$  de  $A$  l'intersection de tous les ensembles convexes fermés contenant  $A$ . » ([3], p. 105)

Dans le cas des systèmes commandés, le théorème de viabilité s'écrit sous la forme suivante :

**THÉORÈME 3.2** ([4]) *Soit  $U : X \rightarrow Z$  une correspondance de Marchaud. Soit  $f : X \times Z \rightarrow X$  continue, à croissance linéaire (vérifiant (21)), et soient les ensembles  $\{f(x, u); u \in U(x)\}$  convexes pour tout  $x \in \text{Dom}(U)$ . Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$  fermé. Alors  $K$  est viable pour le système commandé :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \quad (24)$$

si et seulement si la correspondance de régulation  $R_K$  définie par :

$$\forall x \in K, R_K(x) = \{u \in U(x) \mid f(x, u) \in T_K(x)\} \quad (25)$$

a des valeurs non vides pour tout  $x \in K$ .

Lorsque  $F$  est lipschitzienne,<sup>3</sup> la frontière du noyau de viabilité possède une propriété de semi-perméabilité : partant d'un point situé à l'intersection de la frontière de  $\text{Viab}_F(K)$  et de l'intérieur de  $K$ , aucune solution n'entre immédiatement dans  $\text{Viab}_F(K)$  ; soit elle sort de  $\text{Viab}_F(K)$ , soit elle suit la frontière. Pour entrer à nouveau dans  $K$ , il faut que la solution sorte temporairement de  $K$  (notion de crise, [18]).

**THÉORÈME 3.3** ([24]) *Soit  $F : X \rightarrow X$  une correspondance de Marchaud et lipschitzienne d'ordre  $\ell$ , et  $K \subset \text{Dom}(F)$  fermé. Alors  $\forall x \in \partial \text{Viab}_F(K) \cap \overset{\circ}{K}$ , il existe  $T > 0$  tel que toute solution  $x(\cdot) \in S_F(x)$  viable dans  $K$  reste sur la frontière  $\partial \text{Viab}_F(K) \cap \overset{\circ}{K}$  jusqu'à l'instant  $T$ . En particulier on a*

$$\forall x \in \partial \text{Viab}_F(K) \cap \overset{\circ}{K}, F(x) \cap D_K(x) = \emptyset$$

Si  $F$  a les propriétés de Marchaud, mais n'est plus lipschitzienne, Saint-Pierre ([28]) montre que l'on perd la propriété de semi-perméabilité. En particulier, si  $K$  est un sous-ensemble fermé de  $X$  d'intérieur non vide, et si le noyau de viabilité  $\text{Viab}_F(K)$  est contenu dans l'intérieur de  $K$ , alors la frontière de  $\text{Viab}_F(K)$  est également un domaine de viabilité.

### 3.2 Tir sur cible avec contraintes d'état

Soit  $C$  une cible et  $K$  un ensemble contraint. Considérons le système<sup>4</sup> :

$$x'(t) \in F(x(t)) \doteq \{(f(x(t), u), u \in U)\}, \text{ pour presque tout } t > 0 \quad (26)$$

3. Une correspondance est lipschitzienne si et seulement si il existe une constante  $\ell > 0$  telle que  $\forall x, y \in \text{Dom}(F)$ ,  $F(y) \subset F(x) + \ell \|y - x\| B$  (on note généralement  $\rho B$  la boule de centre 0 et de rayon  $\rho$ ).

4. Les solutions sont définies dans l'espace des fonctions absolument continues  $W_{1,1}([0, \infty[, \mathbf{R}^3, [0, \infty[)$ , c'est-à-dire que  $t \in [0, \infty[$ , l'espace d'états est  $\mathbf{R}^3$  et la mesure est en  $e^{-\kappa t} dt$  pour un  $\kappa > 0$  arbitraire, au lieu de  $dt$  que l'on prendrait sur  $[0, T]$ .

La première question qui se pose à propos du tir sur la cible  $C$  est de déterminer l'ensemble des points de  $K$  à partir desquels il existe au moins une solution restant dans  $K$  et atteignant la cible  $C$  en temps fini. Cet ensemble est noté  $\text{Vict}_F(K, C)$ . On note  $\tilde{F}$  la correspondance coïncidant partout avec  $F$  sauf en  $C$  et, pour tout  $x \in C$ ,  $\tilde{F}(x) = \overline{c\partial}(F(x) \cup \{0\})$ .

- Si  $\text{Viab}_F(K) \neq \emptyset$ , Cardialaguet, Quincampoix et Saint-Pierre ([16]) introduisent la fonction « temps minimal d'atteinte de la cible » :

$$\theta_K^C = \min\{\tau \mid \exists x(\cdot) \text{ solution de (16) } \mid x(t) \in K, \forall t \leq \tau, \text{ et } x(\tau) \in C\} \quad (27)$$

Ils montrent que cette fonction est semi-continue inférieurement et que :

$$\text{Vict}_F(K, C) = \text{dom}(\theta_K^C) = \{x \mid \theta_K^C(x) < \infty\} \quad (28)$$

En particulier,  $\text{Vict}_F(K, C)$  est fermé.

- Si  $\text{Viab}_F(K) = \emptyset$ , si  $F$  a les propriétés de Marchaud, et si  $K$  et  $C$  sont des ensembles fermés de  $X$ , alors :

**THÉOREME 3.4** *Soit  $F$  une correspondance de Marchaud et  $K$  fermé. Supposons  $\text{Viab}_F(K) = \emptyset$ . Alors*

$$\text{Vict}_F(K, C) = \text{Viab}_{\tilde{F}}(K) \quad (29)$$

*Preuve* - Montrons que  $\text{Vict}_F(K, C) \subset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$ .

Soit  $x_0 \in \text{Vict}_F(K, C)$ . Il existe une trajectoire  $x(\cdot)$  solution de (16) vérifiant :

$$\exists T < \infty \text{ tel que } \forall t \in [0, T[, x(t) \in K \text{ et } x(t) \notin C; \text{ et } x(T) \in C \quad (30)$$

$T$  est le premier instant où  $x(\cdot)$  touche la cible  $C$  (qui est fermée). Définissons :

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } t \in [0, T[ \\ x(T) & \text{pour } t \geq T \end{cases} \quad (31)$$

Pour tout  $t < T$ ,  $\tilde{x}(t) \notin C$  et  $\tilde{x}'(t) = x'(t) \in F(x(t)) = \tilde{F}(\tilde{x}(t))$ , p. p.  $t \in [0, T[$ ; pour tout  $t \geq T$ ,  $\tilde{x}(t) \in C$  et  $\tilde{x}'(t) = 0$ , qui appartient par construction à  $\tilde{F}(\tilde{x}(t))$ .

Réciproquement, soit  $x_0 \in \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$ . Alors, il existe une solution  $\tilde{x}(\cdot)$  viable pour  $\tilde{F}$ . En outre, il existe  $T > 0$  tel que  $\tilde{x}(T) \in C$ . Sinon, on aurait  $\tilde{x}(t) \in F(x(t))$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . En conséquence,  $\tilde{x}(t)$  serait une solution viable pour  $F$  issue de  $x_0$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que  $\text{Viab}_F(K) = \emptyset$ . Donc  $\text{Viab}_{\tilde{F}}(K) \subset \text{Vict}_F(K, C)$ .  $\square$

Ces notions de cible, de domaine de victoire et son approximation numérique se sont avérées fécondes en sciences sociales, comme nous le montrons en reprenant et en développant l'analyse par [11] du texte de Fredrik Barth concernant l'organisation des pêcheurs norvégiens (Barth, 1981). Dans ce cas, après avoir vérifié que le noyau  $\text{Viab}_F(K)$  est vide, il nous suffit de calculer  $\text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$  pour déterminer  $\text{Vict}_F(K, C)$ .

## 4 MISE EN ŒUVRE DE L'ALGORITHME DE VIABILITÉ

### 4.1 Approximation du noyau de viabilité et du domaine de victoire

Celle-ci est proposée par Saint-Pierre [27], [26] pour déterminer le noyau de viabilité d'un système dynamique contraint de la forme :

$$x'(t) \in F(x(t)), \quad \text{p.p. tout } t > 0, \quad x(t) \in K, \quad \forall t > 0 \quad (32)$$

où  $F$  est une correspondance de Marchaud. Lorsque la correspondance est lipschitzienne sur  $K \setminus C$ , il considère l'approximation  $F_\varepsilon$  de la correspondance  $F$  :

$$F_\varepsilon(x) \doteq F(x) + \varepsilon M(x) \ell(x) \mathcal{B} \quad (33)$$

où  $M(x) \doteq \sup_{y \in F(x'), x' \in \mathcal{B}(x,1)} \|y\|$  est une évaluation de la borne locale de la correspondance,  $\ell(x)$  est la constante de Lipschitz de  $F$  sur un voisinage de  $x$ , et  $\mathcal{B}$  est la boule unité de  $X$ .

La discrétisation par rapport au temps de la dynamique initiale (32) conduit au système discret suivant ([27]) :

$$x^{n+1} \in G_\varepsilon(x^n) \quad (34)$$

où

$$G_\varepsilon(x) = x + \varepsilon F_\varepsilon(x) \quad (35)$$

Le noyau de viabilité<sup>5</sup> discret  $\overrightarrow{\text{Viab}}_{G_\varepsilon}(K)$ , est l'ensemble des valeurs initiales  $x^0 \in K$  d'une suite  $(x^n)_n$  solution de (34) vérifiant  $x^n \in K$  pour tout  $n$ . Pour calculer  $\overrightarrow{\text{Viab}}_{G_\varepsilon}(K)$ , on construit la suite d'ensembles  $K^n$  selon l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} K^0 &\doteq K \\ K^{n+1} &\doteq \{x \in K^n \mid G_\varepsilon \cap K^n \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (36)$$

Saint-Pierre [27] montre que si  $F$  est une correspondance lipschitzienne, à valeurs compactes et convexes, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = \overrightarrow{\text{Viab}}_{G_\varepsilon}(K) \quad (37)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overrightarrow{\text{Viab}}_{G_\varepsilon}(K) = \text{Viab}_F(K) \quad (38)$$

---

5. La flèche sur  $\overrightarrow{\text{Viab}}_{G_\varepsilon}(K)$  précise l'aspect discret de la construction. Il ne s'agit plus de l'ensemble des points à partir desquels il existe une solution différentiable, mais à partir desquels il existe une suite  $(x^n)_n$  qui reste dans  $K$ .

## 4.2 Application de l'algorithme du noyau de viabilité au cas des pêcheurs norvégiens

La première difficulté pour appliquer l'algorithme d'approximation du noyau de viabilité du système (16) vient du comportement de la fonction  $y \rightarrow \ln(1 - e^{-\lambda y})$  lorsque  $y$  tend vers 0.

PROPOSITION 4.1 *F n'est pas à image compacte en  $y = 0$ .*

Dans le cas des pêcheurs norvégiens, la correspondance  $F$  définie par l'inclusion 9 n'est pas à images compactes. En effet, d'après 8 et 9,  $F$  peut être réécrite comme :

$$F(x(t)) = \{g(x(t)) + h(x(t))u, u \in [0, 1]\} = [g(x), g(x) + h(x)] \quad (39)$$

avec

$$g(x) = \begin{pmatrix} c - y \\ -\alpha Ny \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{pmatrix} y \\ \alpha Ny \\ pN \ln(\Phi(y)) \end{pmatrix} \quad (40)$$

Or, en  $y = 0$ , soit  $x = (z, 0, p)$ :

$$[g(x), g(x) + h(x)] = [(c, 0, 0), (c, 0, -\infty)] \quad (41)$$

qui n'est pas un ensemble compact, condition nécessaire à l'application des théorèmes de viabilité.

Pour surmonter cette difficulté, choisissons  $y_{\min} \in ]0, y]$ , et montrons que  $F$  est de Marchaud sur

$$K^* = \{x = (z, y, p) \mid z \leq 0, y \geq y_{\min} > 0, p \in [0, 1]\} \quad (42)$$

Nous déterminons ensuite le domaine de victoire  $\text{Vict}_F(K^*, C)$ , et sa convergence vers  $\text{Vict}_F(K, C)$  lorsque  $y_{\min}$  tend vers 0.

PROPOSITION 4.2 *F satisfait les propriétés de Marchaud sur  $K^*$ .*

En effet :

- $F$  est linéaire en  $u$ , donc à valeurs convexes, et

$$[g(x), g(x) + h(x)] = [(c - y, -\alpha Ny, 0), (c, 0, pN \ln \Phi(y))] \quad (43)$$

est un intervalle convexe et compact de  $\mathbb{R}^3$ .  $F$  est donc une correspondance à images convexes et compactes sur  $K^*$ .

- $F$  est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que son graphe  $\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in K^* \times K^* \mid y \in F(x)\}$  est fermé.

En effet, soit  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Graph}(F)$ , c'est-à-dire que  $y_n \in F(x_n)$  et  $x_n$  est de la forme  $(z_n, y_n, p_n)$ . Supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ , c'est-à-dire que  $z_n \rightarrow z, y_n \rightarrow y, p_n \rightarrow p$ .

Par définition,

$$\forall n, (x_n, y_n) \in \text{Graph}(F) \Leftrightarrow \exists u_n \in [0, 1] \text{ tel que } y_n = f(x_n \cdot u_n) \quad (44)$$

Comme  $[0, 1]$  est compact dans  $\mathbb{R}$ , on peut extraire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente vers  $u \in [0, 1]$ .

Soient trois suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant respectivement vers  $u$ ,  $y$  et  $p$ . Par continuité,  $Y_n := F(x_n, u_n)$  converge vers  $Y := F(x, u)$ . donc  $(x, Y) \in \text{Graph}(F)$ , ce qui prouve que  $\text{Graph}(F)$  est fermé, et donc, que  $F$  est semi-continue supérieurement.

–  $F$  est à croissance linéaire : Posons

$$\begin{aligned} M(x) &= \sup_{u \in [0, 1]} \sup_{x \in K^*} (|c - (1-u)y|, |-\alpha N(1-u)y|, |pNu \ln \Phi(y)|) \\ &= \sup_{Y \in F(x)} \|Y\|_\infty \end{aligned} \quad (45)$$

Comme  $0 < y \leq y_{\min}$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $c \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |c - (1-u)y| &\leq |c| + |(1-u)y| \leq |c| + |y| \leq |c| (\|x\|_\infty + 1) \\ |-\alpha N(1-u)y| &\leq \alpha N y \leq N (\|x\|_\infty + 1) \\ |pNu \ln \Phi(y)| &\leq p \|N \ln \Phi(y_{\min})\| \leq \|N \ln \Phi(y_{\min})\| (\|x\|_\infty + 1) \end{aligned} \quad (46)$$

ce qui prouve que  $F$  est à croissance linéaire.

PROPOSITION 4.3  $F$  est lipschitzienne sur  $K^*$ .

Il s'agit de montrer que :

$$\exists L > 0, \forall x_1 \in K^*, \forall x_2 \in K^*, F(x_1) \subset F(x_2) + L \|x_1 - x_2\| B_3$$

Or, les jacobiens de  $g$  et de  $h$ , intervenant dans (39) sont :

$$\forall x \in K^*, J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha N & 0 \\ 0 & pN \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} & N \ln \Phi(y) \end{pmatrix} \quad (47)$$

Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in K^*, \exists x_3 \in ]x_1, x_2[ \text{ tel que } g(x_1) - g(x_2) = J_g(x_3) \cdot (x_1 - x_2) \quad (48)$$

d'où

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|_\infty \leq \|J_g(x_3)\|_\infty \cdot \|x_1 - x_2\|_\infty = \max(1, \alpha N) \|x_1 - x_2\|_\infty \quad (49)$$

ce qui prouve que  $g$  est lipschitzienne. De même,

$$\forall x_1, x_2 \in K^*, \exists x_4 \in ]x_1, x_2[ \text{ tel que } h(x_1) - h(x_2) = J_h(x_4) \cdot (x_1 - x_2) \quad (50)$$

et

$$\begin{aligned} \|h(x_1) - h(x_2)\|_\infty &\leq \|J_h(x_4)\|_\infty \cdot \|x_1 - x_2\|_\infty \\ &= \max(1, \alpha N, N \left| \frac{\Phi'(y_{\min})}{\Phi(y_{\min})} \right|) \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned} \quad (51)$$



ce qui prouve que  $h$  est lipschitzienne.

Il existe donc deux constantes positives  $\lambda_g$  et  $\lambda_h$  telles que :

$$\begin{aligned} g(x_1) &\in g(x_2) + \lambda_g \|x_1 - x_2\|_\infty B_3 \\ h(x_1) &\in h(x_2) + \lambda_h \|x_1 - x_2\|_\infty B_3 \end{aligned} \quad (52)$$

Or,

$$h(x_1)u \in [0, h(x_1)] \subset [0, h(x_2)] + \lambda_h \|x_1 - x_2\|_\infty B_3 \quad (53)$$

Donc

$$g(x_1) + h(x_1)u \in g(x_2) + h(x_2)u + (\lambda_g + \lambda_h) \|x_1 - x_2\|_\infty B_3 \quad (54)$$

et

$$F(x_1) \subseteq F(x_2) + (\lambda_g + \lambda_h) \|x_1 - x_2\|_\infty B_3 \quad (55)$$

ce qui prouve que  $F$  est une correspondance lipschitzienne.

### 4.3 Convergence du domaine de victoire

Il s'agit de s'assurer que le noyau de viabilité de  $\tilde{F}$  défini pour  $y \geq \epsilon > 0$  converge quand  $\epsilon$  tend vers 0.

Posons :

$$\tilde{F}(x) \doteq \begin{cases} \{f(x, u), u \in [0, 1]\} & \text{si } x \notin C \\ \overline{\text{co}}(\{f(x, u), u \in [0, 1]\} \cup \{0\}) & \text{si } x \in C \end{cases} \quad (56)$$

et :

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \{(z, y, p) \in K, y \geq \epsilon\} \\ V_\epsilon &= \text{Viab}_{\tilde{F}}(K_\epsilon) \end{aligned} \quad (57)$$

Par définition,  $K \subset K' \Rightarrow \text{Viab}_{\tilde{F}}(K) \subset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K')$ , ou  $\epsilon' < \epsilon \Rightarrow K_\epsilon \subset K_{\epsilon'} \Rightarrow \text{Viab}_{\tilde{F}}(K_\epsilon) \subset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K_{\epsilon'})$ . La suite  $V_\epsilon$  est donc une suite croissante d'ensembles fermés.

Notons  $\bar{V} : = \overline{\bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon}$ . Alors  $\forall \epsilon > 0, V_\epsilon \subset \bar{V}$ .

**PROPOSITION 4.4**  $\bar{V} = \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$

*Preuve :*

**LEMME 4.5** Soit  $x_0 = (z_0, 0, p_0)$  avec  $z_0 < 0$ . En ce point,  $\delta$  devient :

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ z(t) &= z_0 + ct \\ p'(t) &\in ]-\infty, 0] \end{aligned} \quad (58)$$

Le temps nécessaire pour atteindre l'axe ( $z = 0, y = 0, p$ ), à commande  $u$  fixée, est  $T_0 = -\frac{z_0}{c}$ . Pour atteindre la cible, c'est-à-dire arriver au seuil  $p_s$ , on doit choisir pour vitesse de  $p$  la constante  $w_0$  telle que :

$$w_0 = \frac{p_0 - p_s}{T_0} \quad (59)$$

Alors la trajectoire définie par :

$$\begin{cases} z(t) &= z_0 + ct \\ y(t) &= 0 \\ p(t) &= p_0 - \frac{p_0 - p_s}{T_0} t \end{cases} \quad (60)$$

atteint la cible  $C$  à l'instant  $T_0$ , et donc,  $x_0 \in \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$ .

- Montrons que  $\bar{V} \subset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$  :  $\forall \epsilon > 0$ ,  $V_\epsilon$  est par définition le noyau de viabilité de  $K_\epsilon$  pour  $\tilde{F}$ , c'est-à-dire que,  $\forall \epsilon > 0, \forall x_\epsilon(0) \in V_\epsilon, \exists x_\epsilon(\cdot)$  solution viable dans  $K_\epsilon$ . Donc  $V_\epsilon$  est un domaine de viabilité de  $K$  pour  $\tilde{F}$ , et par conséquent,  $\bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon$  aussi. Comme  $\text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$  est fermé,

$$\bar{V} = \bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon \subset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K) \quad (61)$$

- Réciproquement, montrons que  $\bar{V} \supset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$  : Soit  $x_0 \in \text{Viab}_{\tilde{F}}(K)$ . Nous considérons les trois cas suivants :

1. Cas  $z_0 < 0$  et  $y_0 = 0$ .

Considérons le point  $x_\epsilon^0 = (z_0 - \epsilon, \epsilon, p_0)$  avec  $\epsilon < \frac{z_0}{2}$ . Avec  $u = 1$ , la trajectoire  $x_\epsilon(t)$  au voisinage de  $y = 0$  évolue suivant :

$$\begin{cases} z(t) &= z_0 - \epsilon + ct \\ y(t) &= \epsilon \\ p(t) &= p_0 e^{Nt \ln(\Phi(\epsilon))} \end{cases} \quad (62)$$

Le temps nécessaire pour annuler  $z$  à commande  $u$  fixée vaut  $\frac{\epsilon - z_0}{c} > 0$ . Pour atteindre la cible, il faut trouver  $\epsilon > 0$  tel que :

$$p_0 e^{N \frac{\epsilon - z_0}{c} \ln(\Phi(\epsilon))} \leq p_s \Leftrightarrow \frac{\epsilon - z_0}{c} \ln(\Phi(\epsilon)) \leq \ln\left(\frac{p_s}{p_0}\right) \quad (63)$$

Le membre de gauche de cette inégalité tend vers  $-\infty$  quand  $\epsilon$  tend vers 0, car  $z_0 < 0$ , donc  $\exists \epsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \epsilon < \epsilon_0$ , l'inégalité 63 est vérifiée, donc  $x_\epsilon^0 \in V_\epsilon$ .

Par conséquent, comme  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon^0 = x^0$ ,

$$x^0 \in \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} V_\epsilon \subset \overline{\bigcup_{\epsilon \rightarrow 0} V_\epsilon} \subset \text{Viab}_{\tilde{F}}(K) \quad (64)$$

2. Cas  $z_0 < 0$  et  $y_0 > 0$ .

Il existe  $T_0$  tel que  $z(T_0) = 0, p(T_0) < p_s, y(T_0) > 0$ .  $y$  ne s'annule pas en temps fini et décroît le long de la trajectoire jusqu'à  $T_0$ , en atteignant son minimum en  $T_0$  :  $\forall t \in [0, T_0], y(t) \geq y(T_0) > 0$ . La trajectoire reste donc toujours dans  $K_{\epsilon_0}$  avec  $\epsilon_0 = y(T_0)$ . Il existe donc un  $\epsilon$  tel que  $\epsilon < y(T_0)$  et  $x(t) \in K_\epsilon$ , d'où  $x_0 \in V_\epsilon$  et  $x_0 \in \overline{\bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon}$ .

3. Cas  $z_0 = 0$  et  $y_0 = 0$ . Soit  $x_0 = (0, 0, p_0) \in \text{Viab}_{\bar{F}}(K)$ . Soit  $\alpha > 0$  et posons  $x_\alpha^0 = (-\alpha, 0, p_0)$ . D'après le lemme 1.  $x_\alpha^0 \in \text{Viab}_{\bar{F}}(K) = \overline{\bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon}$ . Donc,

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon_\delta, \exists x_{\epsilon_\delta}^0 \in V_{\epsilon_\delta}, |x_\alpha^0 - x_{\epsilon_\delta}^0| \leq \delta \quad (65)$$

En  $\delta = \alpha$ ,  $|x^0 - x_{\epsilon_\alpha}^0| \leq \alpha$ , donc :

$$|x^0 - x_{\epsilon_\alpha}^0| \leq |x^0 - x_\alpha^0| + |x_\alpha^0 - x_{\epsilon_\alpha}^0| \leq 2\alpha \quad (66)$$

et  $x_{\epsilon_\alpha}^0 \in V_{\epsilon_\alpha}$ .

De sorte que :

$$\lim_{\epsilon_\alpha \rightarrow 0} x_{\epsilon_\alpha}^0 = x^0 \in \overline{\bigcup_{\epsilon_\alpha} V_{\epsilon_\alpha}} = \text{Viab}_{\bar{F}}(K) \quad (67)$$

et  $x_\alpha^0 \in \text{Viab}_{\bar{F}}(K)$ .

Nous avons donc montré dans les trois cas  $x_0 = (z_0 < 0, y_0 = 0, p_0 \in [0, 1])$ ,  $(z_0 < 0, y_0 > 0, p_0 \in [0, 1])$ , et  $(z_0 = 0, y_0 = 0, p_0 \in [0, 1])$ , que  $x^0 \in \text{Viab}_{\bar{F}}(K)$ , donc  $\text{Viab}_{\bar{F}}(K) \in \bar{V} = \overline{\bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon}$ .

En conclusion,

$$\text{Viab}_{\bar{F}}(K) = \bar{V} = \overline{\bigcup_{\epsilon > 0} V_\epsilon} \quad (68)$$

L'algorithme de viabilité est applicable sur  $K^*$  ; la face  $\{z \leq 0, y = 0, p \in [0, 1]\}$  est viable au sens où l'on peut atteindre la cible  $C$ , et les domaines de victoires de  $K_\epsilon$  convergent vers celui de  $K$ . On peut facilement modifier l'algorithme de viabilité pour trouver celui-ci. Il suffit, lorsqu'on se trouve sur l'axe des  $y$  et en des points dont la distance à l'origine est inférieure à la taille de la trame, de considérer que les points situés à gauche sont viables.

Nous avons vu que :

$$\text{Viab}_{\bar{F}}(K) = \text{Vict}_F(K, C) \quad (69)$$

$F$  est une correspondance de Marchaud et lipschitzienne sur  $K$ , on peut donc appliquer l'algorithme d'approximation du noyau de viabilité, en prenant pour  $M(x)$ , la borne locale de la correspondance, pour  $l(x)$ , la constante de Lipschitz de  $F$  sur un voisinage de  $x$ , et pour  $\rho(x)$ , un pas de discrétisation en temps dépendant de  $x$ , les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M(x) &= \max(c, \alpha N, N \ln \Phi(y_{\min})) \\ l(x) &= \max(0, 0, 1 + \alpha N + \Phi'(y)) = 1 + \alpha N + \Phi'(y) \\ \rho(x) &= \sqrt{\frac{2h}{M(x)l(x)}} \end{aligned} \quad (70)$$

où  $h$  est le pas de discrétisation de  $x$ . On aboutit au système discret suivant :

$$\begin{pmatrix} z^{n+1} \\ y^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} z^n + \rho(x^n)(c - (1 - u)y^n) \\ y^n - \rho(x^n)(\alpha(1 - u)Ny^n) \\ z^n + \rho(x^n)(p^n Nu \ln \Phi(y^n)) \end{pmatrix} + \frac{\rho(x^n)^2 M(x^n) l(x^n)}{2} B, u \in [0, 1] \right\} \quad (71)$$

La figure 5 montre le domaine de victoire au voisinage de  $y = 0$ .

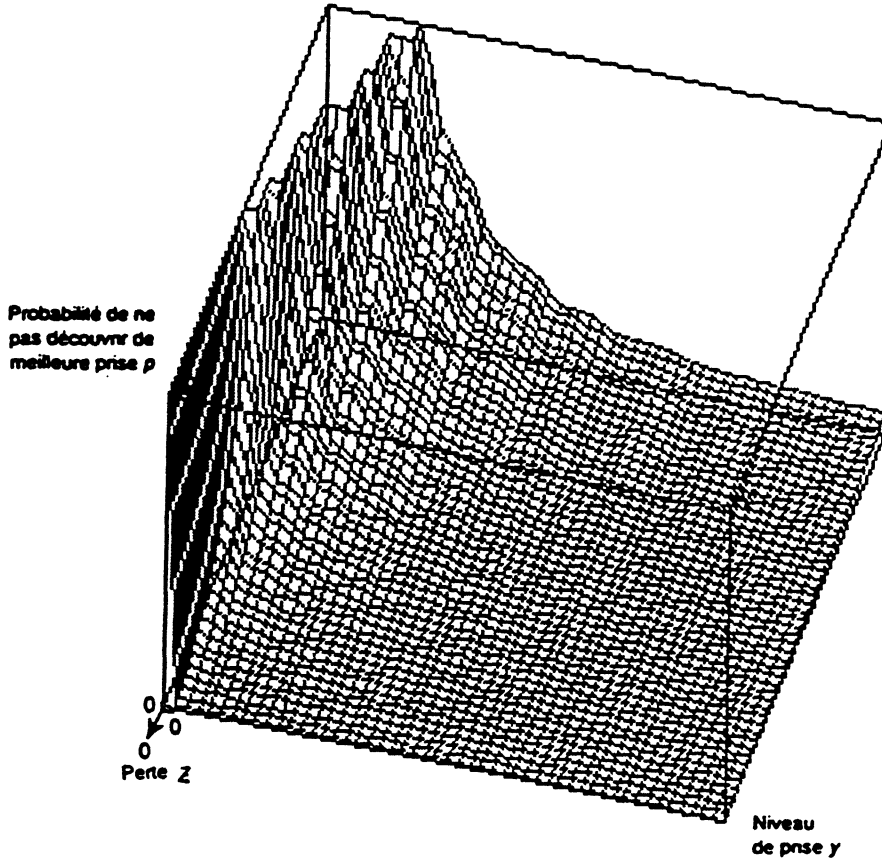


FIG. 5 – *Domaine de victoire*  $\text{Vict}_F(K, C)$  au voisinage de  $y = 0$ .

#### 4.4 Approximation de la loi de régulation

Pour achever l'étude pratique, il faut non seulement déterminer le noyau de viabilité, mais aussi déterminer la commande  $u$  viable, c'est-à-dire la commande permettant de rester dans le noyau de viabilité ou sur sa frontière.

L'ensemble des commandes viables est :

$$R(x) \doteq \{u \in [0, 1] \mid f(x, u) \in T_{\text{Viab}_{\bar{F}}(K)}(x)\} \quad (72)$$

qui définit la loi de régulation  $R$ .

Cardaliaguet, Quincampoix et Saint-Pierre ([16]) montrent que, dans certaines situations, la correspondance :

$$R_\varepsilon(x) \doteq \{u \in [0, 1] \mid f_\varepsilon(x, u) \in T_{\text{Viab}_{\bar{F}_\varepsilon}(K)}(x)\} \quad (73)$$

donne une bonne approximation de la correspondance exacte. Il n'est pas notre propos ici d'élucider les difficultés mathématiques de cette question. Aussi nous contentons-nous de visualiser les résultats numériques et d'en donner une interprétation dans le cadre du problème des pêcheurs norvégiens.

Comme  $F$  est une correspondance à images convexes, la commande viable est unique en tout point de la frontière du noyau puisqu'en ces points, le cône contingent est lui aussi convexe. En ces points,  $R(x)$  est donc une fonction univoque de  $(z, y)$ , représentée sur la figure 2. Aux autres points, toutes les commandes sont viables :  $R(x) = [0, 1]$  et ne sont pas représentées sur cette figure.

Il est intéressant de noter la règle suivante que l'on déduit des résultats numériques obtenus : pour un même niveau de la ressource  $y$ , la valeur de la commande  $u$  d'un capitaine est d'autant plus petite que sa richesse initiale est grande, le capitaine peut d'autant plus se permettre d'imiter et d'éviter de prendre des risques. Inversement, il a d'autant plus intérêt à prendre des risques qu'il est pauvre.

Le calcul du domaine de victoire indique, par un effet de retour, la probabilité de ne pas découvrir de meilleure prise à l'instant initial,  $p_0$ , de laquelle il faut partir, à  $(z_0, y_0)$  fixé, pour que l'évolution future probable et bien commandée mène aux meilleurs chances de succès. L'évaluation a priori de  $p_0$  se transforme donc en règle de décision (suivre ou non). Une sur-évaluation de  $p_0$  conduit à se situer à tort plus près de la frontière, donc à sélectionner plus tôt les commandes viables ; inversement, une sous-évaluation de  $p_0$  incite le capitaine à prendre trop tardivement les mesures qui s'imposent.

## 5 ENSEMBLE ATTEIGNABLE ET EXEMPLES DE TRAJECTOIRES

L'ensemble atteignable depuis un état  $x^0 \in K$  est l'ensemble  $\mathcal{A}(x^0, K)$  des états qui peuvent être atteints à partir de la position  $x^0$  tout en demeurant dans  $K$ .

Déterminer cet ensemble  $\mathcal{A}(x^0, K)$  est un problème difficile en dehors de situations particulières. Il faudrait théoriquement calculer l'ensemble parcouru par toutes les trajectoires issues de  $x^0$ . Il existe certains algorithmes permettant de calculer cet ensemble en l'absence de contraintes.

Pour atteindre la cible, il faut que la position initiale appartienne au domaine de victoire calculé précédemment. On peut alors se demander si la solution qui consiste à calculer tout le domaine de victoire n'est pas trop coûteuse et s'il n'est pas préférable de calculer seulement l'ensemble atteignable. La réponse est que les « coûts » numériques sont pratiquement du même ordre. Un atout majeur du calcul du domaine de victoire est que celui-ci fournit une règle de décision viable sous forme de rétroaction, à condition que la rétroaction approchée soit effectivement proche d'une sélection de la rétroaction exacte.

Pour déterminer l'ensemble  $\mathcal{A}(x^0, K)$ , on considère le système dynamique initial :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)), & p.p.t \geq 0 \\ u(t) \in U(x), & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (74)$$

On définit le système dynamique rétrograde :

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = -f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)), & p.p.t \geq 0 \\ \hat{u}(t) \in U(x(t)), & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (75)$$

D'une façon générale on vérifie que si  $x(\cdot) \in S_f(x^0)$  est une solution du système (74),  $\hat{x}(\cdot)$  définie par  $\hat{x}(t) = x(-t)$  est solution du système (75).

L'ensemble des points  $x \in K$  qui peuvent être atteints par une trajectoire solution viable du système (74) issue de  $x^0$  coïncide avec l'ensemble des points à partir desquels il existe une trajectoire solution viable du système (75) qui atteint  $x^0$  en

temps fini. On peut donc déterminer cet ensemble en calculant par exemple la fonction temps minimal associée à ce problème de cible (Cardialaguet, Quincampoix, Saint-Pierre, [16]). Toutefois, en l'absence d'équilibres dans  $K$ , lorsque le noyau de viabilité de  $K$  pour  $-F$  est vide, ce qui est le cas ici puisque toute trajectoire issue d'un point de  $K$  quitte nécessairement  $K$  en temps fini, on montre que l'ensemble des points à partir desquels il existe une trajectoire solution viable du système (75) qui atteint  $x^0$  en temps fini est exactement le noyau de viabilité de  $K$  associé au système :

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = \begin{cases} -f(\hat{x}(t), \hat{x}(t)), & \text{si } \hat{x}(t) \neq x^0 \\ 0, & \text{si } \hat{x}(t) = x^0 \end{cases} & p.p.t \geq 0 \\ \hat{x}(t) \in U(\hat{x}(t)), \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (76)$$

Le calcul du domaine de victoire de  $K$  associé au problème rétrograde (75) est représenté sur la figure 6. A partir du point  $(z^0, y^0, 1)$ , plusieurs points de la cible peuvent être atteints, mais aussi des points hors du domaine de victoire.

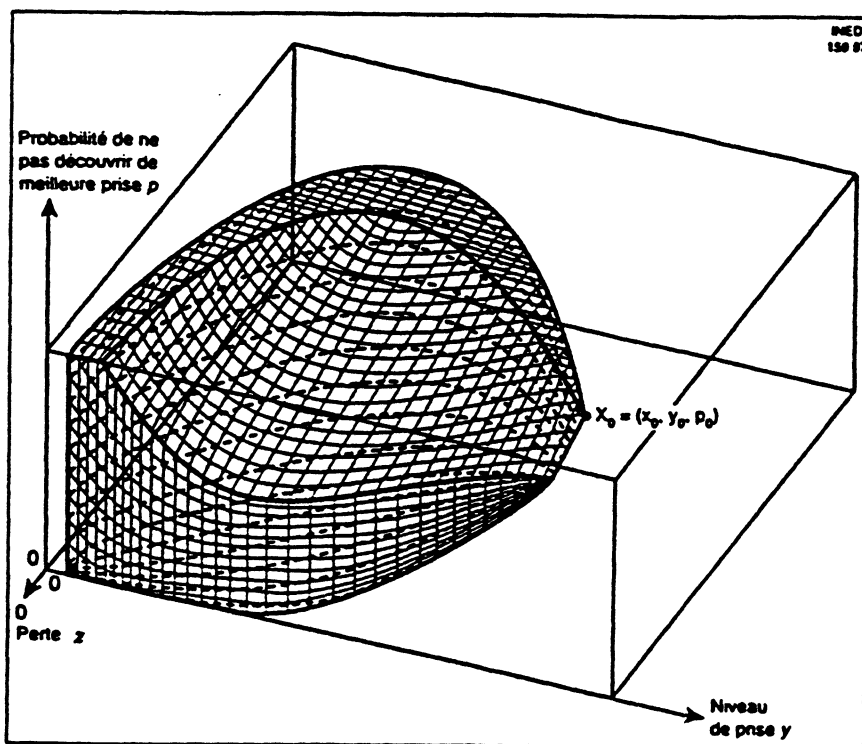


FIG. 6 - Ensemble atteignable à partir d'un point  $x_0 = (z_0, y_0, p_0)$ .

La figure 7 montre des exemples de trajectoires atteignant la cible et circulant dans le domaine de victoire à proximité de la frontière. Chacune d'entre elles est obtenue comme solution du problème rétrograde en démarrant de la cible ; en chacun de ces points, on applique la rétroaction viable représentée sur la figure 2 (voir [9]).

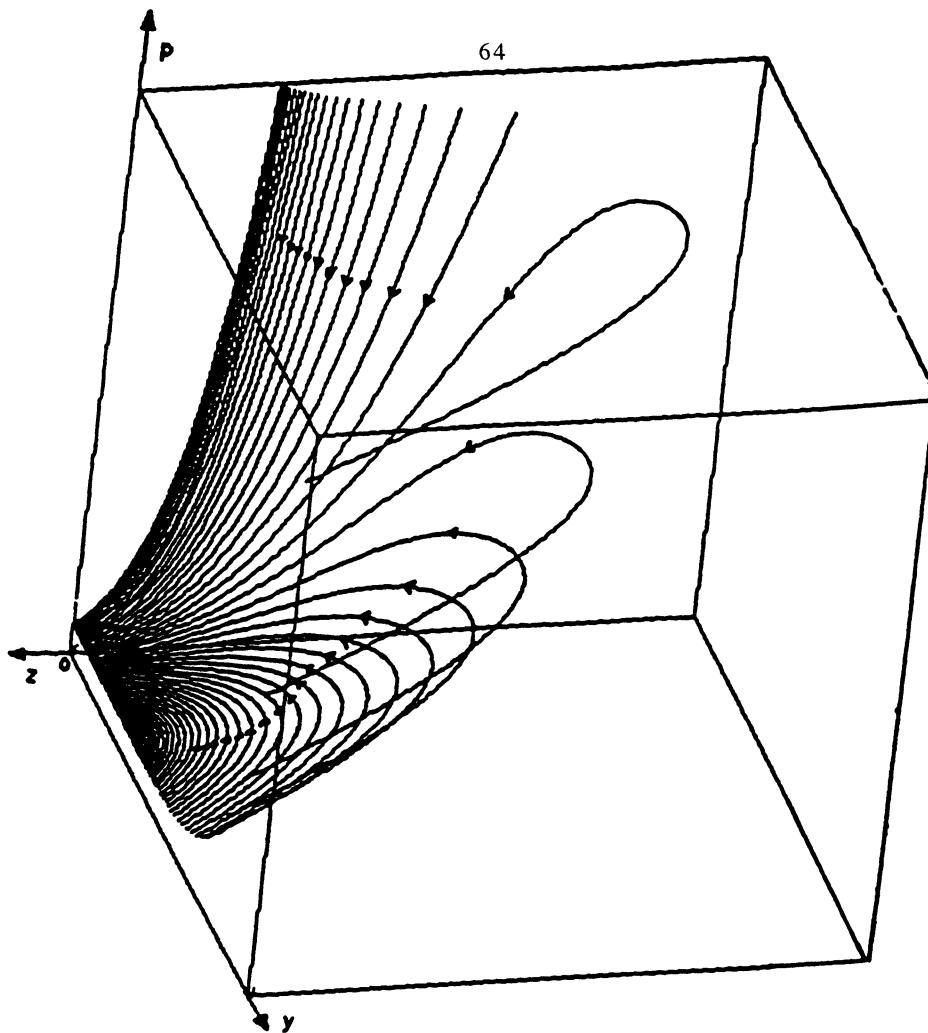


FIG. 7 - Exemples de trajectoires viables atteignant la cible.

## 6 CONCLUSION

L'étude des pêcheurs norvégiens par Fredrik Barth donne lieu à un problème de viabilité, dans lequel la confiance des marins en la capacité du capitaine à les mener au succès joue un rôle complémentaire à l'état de la mer et au capital initial des armateurs. Le domaine de victoire engendré par la dynamique sous contraintes permet de savoir si les conditions, au moment de la prise de décision (imiter ou chercher), sont propres à éviter la ruine. La loi de régulation associée indique les commandes à utiliser.

La modélisation proposée soulève la difficulté de la non compacité de l'image de la correspondance  $\tilde{F}$ , qui ne permet pas d'appliquer tels quels les théorèmes existants. Cependant, nous avons montré que les noyaux de viabilité pour  $y \geq \epsilon$  convergent quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nous avons calculé les commandes viables qui permettent au capitaine pêcheur de courir un risque de ruine suffisamment faible.

L'ensemble atteignable remplace la notion de trajectoire, en décrivant le champ de ses devenir possibles permis par les contraintes. Ceux qui sont viables sont sélectionnés pour que le système perdure, et ceci au moyen de la loi de régulation.

On peut désormais déterminer si un état initial, avec sa probabilité a priori  $p_0$  de ne pas trouver de meilleure prise, est situé ou non dans le domaine de victoire. C'est

ainsi que le domaine de victoire permet de prendre en compte à la fois l'incertain inhérent à la mer et la liberté de manœuvre des individus, et de proposer une règle de décision aux capitaines (rester ou abandonner). Ceux qui estiment mal  $p_0$  de sorte qu'ils sont en dehors du domaine de victoire courent le risque d'être ruinés.

## BIBLIOGRAPHIE

- ALLEN P. M., J. M. Mc GLADE, « Dynamics of discovery and exploitation: the case of the Scotian groundfish fisheries », *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 43, (1986).
- AUBIN J.-P., *Dynamic Economic Theory: a viability approach*, Springer Verlag, 1997.
- AUBIN J.-P., *Initiation à l'analyse appliquée*, Paris, Masson, 1994.
- AUBIN J.-P., *Viability Theory*, Boston, Birkhäuser, 1991.
- AUBIN J.-P., *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*, Paris, Masson, 1984.
- BARTH F., *Process and form in social life, selected essays of Fredrik Barth*, 1, , London, Routledge & Kegan Paul, 1981.
- BARTH F., *Nomads of South Persia*, Boston, Little, Brown and Company, 1961.
- BEBERNES J.W., et SCHUUR J.D., « The Wazewski topological method for contingent equations », *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 87, (1970), 271-280.
- BERNHARD P., « Differential Games », in *Systems and Control Encyclopedia, Theory, Technology Applications*, G. Singh Ed, Pergamon Press, 1988.
- BONNEUIL N., « Population paths implied by the mean number of pairwise nucleotide differences among mitochondrial DNA sequences », *Annals of Human Genetics*, Jan, 62, (1998), 61-73.
- BONNEUIL N., « Jeux, équilibres, et régulation des populations sous contraintes de viabilité: une lecture de l'œuvre de l'anthropologue Fredrik Barth », *Population* 4, (1997), 947-976.
- BONNEUIL N., « Malthus, Boserup and Population Viability », *Mathematical Population Studies* 4(5), (1994), 107-119.
- BONNEUIL N., « Capital accumulation, inertia of consumption and norms of reproduction », *Journal of Population Economics* 7, (1994), 49-62.
- BONNEUIL N., MÜLLERS K., « Viable populations in prey-predator systems », *Journal of Mathematical Biology*, 35, (1997), 261-293.
- CARDIALAGUET P., QUINCAMPOIX M., et SAINT-PIERRE P., « Optimal Synthesis for Minimal time Problems », à paraître.
- CARDIALAGUET P., QUINCAMPOIX M., et SAINT-PIERRE P., « Temps optimaux pour des problèmes avec contraintes et sans contrôlabilité locale », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T.318, s I, (1994), 607-612.
- CARTELIER J., MÜLLERS, « An elementary Keynesian model: a preliminary approach », IIASA, *working paper* (1994), 94-095.
- DOYEN L., SAINT-PIERRE P., « Scale of viability and minimal time of crisis », *Set-valued Analysis*, (1997).
- FRANKOWSKA H., QUINCAMPOIX M., « Viability kernels of differential inclusions with constraints: algorithm and applications » *J. Math. Systems, Estimation*



- and Control*, 1-3 (1991), 371-388.
- HINES W. G. S., « Evolutionary Stable Strategies: a review of basic theory », *Theoretical Population Biology*, 31 (1987), 195-272.
- MÜLLERS K., *Régulation de systèmes dynamiques de l'économie et de l'écologie sous contraintes de viabilité*, Thèse Paris IX Dauphine, 1995.
- QUINCAMPOIX M., SAINT-PIERRE P., « An algorithm for viability kernels in the Hölderian case: approximation by discrete viability kernels », *J. Math. Syst. Est. and Control* (1995), 115-120.
- QUINCAMPOIX M., « Differential inclusions and target problems », *SIAM J. Control and Optim.*, 30, 2 (1992), p. 324-335.
- QUINCAMPOIX M., « Frontière de domaines d'invariance et de viabilité pour des inclusions différentielles avec contraintes », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 311 (1990), 411-416.
- ROSENTAL P. A., « Construire le « macro » par le « micro » : Fredrik Barth et la *microstoria* », in *Jeux d'échelles*, Paris, Gallimard Le Seuil, 1996, 141-160.
- SAINT-PIERRE P., « Equilibria an stability in set-valued analysis: a viability approach », in *Topology in nonlinear analysis*, Warszawa, Banach Center publications, vol 35, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 1996.
- SAINT-PIERRE P., « Approximation of the viability kernel », *Applied Mathematics & Optimisation*, 29 (1994), 187-209.
- SAINT-PIERRE P., « Viability of the boundary of the viability kernel », *Journal of Differential and Integral Equation*, vol 4, 3 (1991), 1147-1153.