

RENÉ LAGRANGE

## Polynômes et fonctions de Legendre

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 97 (1939)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1939\\_\\_97\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1939__97__1_0)

© Gauthier-Villars, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

**L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,**  
 DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

**DIRECTEUR :**

**Henri VILLAT**

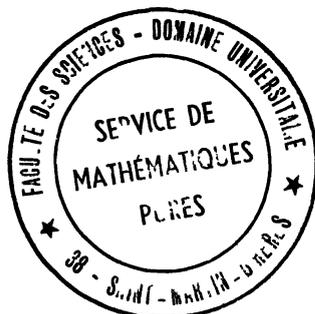
Membre de l'Institut,  
 Professeur à la Sorbonne,  
 Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XCVII

## Polynomes et fonctions de Legendre

Par M. René LAGRANGE

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—  
 1939

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.**

---

**POLYNOMES**  
ET  
**FONCTIONS DE LEGENDRE**

**Par M. René LAGRANGE.**

---

**INTRODUCTION.**

Les polynomes de Legendre constituent la suite la plus simple de polynomes d'une variable orthogonaux sur un intervalle fini donné; grâce à une transformation linéaire de la variable, on se borne à considérer l'intervalle  $(-1, 1)$ . De nombreux problèmes font intervenir tout naturellement des suites de cette nature. Par exemple, dans le problème de la quadrature approchée [14], on substitue à l'intégrandum de  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  un polynome  $F(x)$  de degré donné  $n - 1$  prenant les mêmes valeurs que  $f$  pour  $n$  valeurs données  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de  $x$ .  $F(x)$  s'exprime par la formule d'interpolation de Lagrange, dans laquelle intervient le polynome  $P_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ . L'erreur est

$$E = \int_{-1}^1 [f(x) - F(x)] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{r=1}^n \Lambda_r f(\alpha_r),$$

où

$$(1) \quad \Lambda_r = \frac{1}{P_n'(\alpha_r)} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x - \alpha_r} dx.$$

Si  $f$  est développable en série entière de  $x$  dans  $(-1, 1)$ , on peut écrire

$$f(x) - F(x) = P_n(x)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

et l'on a

$$(2) \quad E = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \int_{-1}^1 P_n(x) x^p dx.$$

$n$  étant fixé,  $E$  dépend du choix des  $\alpha_i$ , et le fait que  $|x|$  reste inférieur à 1 suggère que l'approximation sera généralement d'autant plus avantageuse que (2) commencera par des termes d'indice  $p$  aussi grand que possible. On choisit alors les  $n$  arbitraires de façon que

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x^p dx = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

$P_n$  est orthogonal à tout polynôme de degré moindre, et la suite des  $P_n$  est elle-même une suite orthogonale. Le problème de Gauss est donc résolu si le polynôme  $P_n$  ainsi défini a ses  $n$  zéros dans l'intervalle  $(-1, 1)$ .

Le problème de la meilleure approximation d'une fonction par un polynôme conduit également à une telle suite. Qu'il nous suffise de raisonner sur une fonction réelle  $f(x)$  de variable réelle, sommable et de carré sommable sur  $(-1, 1)$ . Considérons l'ensemble des polynômes  $F(x)$  de degré au plus égal à  $n$ , et, suivant le principe de la méthode des moindres carrés, cherchons, pour cet ensemble, la borne inférieure de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 (f - F)^2 dx = \int_{-1}^1 [f(x) - \lambda_0 - \lambda_1 x - \dots - \lambda_n x^n]^2 dx.$$

Les paramètres étant  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ , les conditions extrémales sont

$$(3) \quad \int_{-1}^1 x^p [f(x) - F(x)] dx = 0 \quad (p = 0, 1, \dots, n).$$

Ces  $n + 1$  équations linéaires ont une solution unique, qui correspond à un minimum de  $I$ , car  $I$  est un polynôme quadratique des  $\lambda_i$  dont la partie homogène du second degré est définie positive. Soit  $f_n(x)$  le polynôme  $F$  ainsi obtenu et  $I_n$  le minimum correspondant de  $I$ . Pour tout polynôme  $F(x)$ , il résulte alors des équations (3) vérifiées par  $f_n$  que

$$(4) \quad \int_{-1}^1 F(x) [f(x) - f_n(x)] dx = 0 \quad (d^0 F \leq n).$$

Retranchons les égalités (4) relatives à  $n$  et  $n - 1$  ; il vient

$$(5) \quad \int_{-1}^1 F(x) [f_n(x) - f_{n-1}(x)] dx = 0 \quad (d^0 F \leq n - 1),$$

qui exprime que la suite des polynomes  $\Phi_n = f_n - f_{n-1}$  est orthogonale. Le degré de  $\Phi_n$  ne surpasse pas  $n$ , et ces polynomes ne sont pas toujours linéairement distincts, comme il apparaît lorsque  $f$  est un polynome. Ils le sont pourtant lorsqu'aucun d'eux n'est identiquement nul, car si  $\Phi_n$  était une combinaison linéaire des polynomes d'indice moindre,  $f_n$  serait au plus de degré  $n - 1$  et coïnciderait avec  $f_{n-1}$ . On verra qu'une telle suite orthogonale de polynomes  $\Phi_n$  linéairement distincts est entièrement définie, à un facteur constant près pour chacun de ces polynomes, et sans ambiguïté si l'on se donne la suite des valeurs des intégrales  $\varpi_n = \int_{-1}^1 \Phi_n^2 dx$ .

## CHAPITRE I.

### POLYNOMES DE LEGENDRE.

1. Pour déterminer une suite de polynomes  $P_n(x)$  de degré  $n = 0, 1, 2, \dots$ , orthogonaux sur  $(-1, 1)$ , écrivons que, pour tout polynome  $F(x)$ , on a

$$(1) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) F(x) dx = 0 \quad (d^0 F < n).$$

Posons  $P_n^{(-k)}(x) = \int_1^x \dots \int_1^x P_n(x) (dx)^k$  et intégrons par parties.

Il vient

$$P_n^{(-1)}(-1) F(-1) + \int_{-1}^1 P_n^{(-1)}(x) F'(x) dx = 0 \quad (d^0 F < n).$$

$d^0 F = 0$  donne  $P_n^{(-1)}(-1) = 0$  et il reste

$$\int_{-1}^1 P_n^{(-1)}(x) F'(x) dx = 0 \quad (d^0 F' < n - 1).$$

Le raisonnement peut être répété  $n - 1$  fois et fournit les égalités  $P_n^{(-k)}(-1) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Par conséquent,  $P_n^{(-n)}(x)$  est un

polynôme de degré  $2n$  qui s'annule, ainsi que ses  $n - 1$  premières dérivées, pour  $x = \pm 1$ , et l'on a

$$(2) \quad P_n(x) = A_n \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

où  $A_n$  est le facteur constant indéterminé.

*Les zéros de  $P_n$  sont réels, distincts et sur l'intervalle  $(-1, 1)$ , car, si  $R$  est un polynôme admettant pour seuls zéros les zéros d'ordre impair de  $P_n$  situés sur  $(-1, 1)$  pris une seule fois chacun, le quotient  $S = P_n : R$  ne change pas de signe dans cet intervalle, donc  $\int_{-1}^1 RP_n dx = \int_{-1}^1 R^2 S dx$  ne peut être nul, et le degré de  $R$  ne peut être inférieur à  $n$ . D'après ce résultat, la solution du problème de Gauss est valable.*

**2. Fonction génératrice.** — Il est commode de représenter la suite des  $P_n$  au moyen de la série

$$\mathcal{X}(z, h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) h^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h^n \frac{d^n(z^2 - 1)^n}{dz^n}.$$

Le dernier membre a la forme d'une série de Lagrange relative à l'équation  $F(t, h) = t - z - h(t^2 - 1) = 0$ ; si  $u$  désigne la racine unique infiniment voisine de  $z$  dans le voisinage de  $h = 0$ , on a en effet

$$\frac{1}{F'(u, h)} = \frac{1}{1 - 2hu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n(z^2 - 1)^n}{dz^n}.$$

On simplifie l'expression  $1 - 2hu = \sqrt{1 - 4zh + 4h^2}$  en remplaçant  $h$  par  $\frac{h}{2}$ , et l'on est ainsi conduit à la définition de Legendre [27,  $\alpha$ ]

$$(3) \quad \mathcal{X}(z, h) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 2zh + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) h^n, \quad \mathcal{X}(z, 0) = 1,$$

en même temps qu'à l'expression de Rodrigues (1) [39]

$$(4) \quad P_n(z) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n(z^2 - 1)^n}{dz^n}.$$

---

(1) Nous posons  $n!! = n(n-2)(n-4) \dots (2 \text{ ou } 1)$ , avec  $0!! = (-1)!! = 1$ .

Enfin,  $n$  intégrations par parties successives donnent

$$\varpi_n = \frac{1}{(2n)!!^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Le développement (3) converge pour  $|h| \leq |\eta^{\pm 1}|$  où  $\eta^{\pm 1} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ ; au delà de ces deux points critiques, on a

$$(3') \quad \mathfrak{P}(z, h) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) h^{-n-1}, \quad \mathfrak{P}(z, h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{h}.$$

3. (3) et (4) montrent que

$$(5) \quad \begin{cases} P_{2n+1}(0) = 0, & P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \\ P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, & P_n(-z) = (-1)^n P_n(z). \end{cases}$$

D'ailleurs le développement de (4) est

$$(6) \quad P_n(z) = \sum_{r=0}^{r \leq \frac{n}{2}} (-1)^r \frac{(2n-2r-1)!!}{(2r)!!} \frac{z^{n-2r}}{(n-2r)!}.$$

Pour  $z = \cos \theta$ , on a  $\eta = e^{\pm i\theta}$  et

$$\mathfrak{P}(\cos \theta, h) = (1 - he^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} (1 - he^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}.$$

En développant chacun de ces facteurs en série entière de  $h$ , l'identification du produit avec (3) donne

$$(7) \quad P_n(\cos \theta) = \sum_{r+s=n} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} \cos(r-s)\theta.$$

Les coefficients étant positifs, le maximum de  $P_n(\cos \theta)$ , qui est aussi celui de  $|P_n(\cos \theta)|$ , a lieu quand tous les cosinus valent 1, c'est-à-dire pour  $\theta = 0$ ; d'après (5), ce maximum est 1. Il en résulte  $P_n(\cos \theta) \geq -1$ , mais cette limite inférieure ne peut être atteinte que si tous les cosinus peuvent prendre la valeur  $-1$ , donc pour  $n$  impair et  $\theta = \pi$ . Le second membre de (7), où l'on remplace  $\cos$  par  $\sin$ , étant évidemment nul, (7) s'écrit encore

$$P_n(\cos \theta) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sum_{r=0}^n \frac{(2r-1)!! n(n-1)\dots(n-r+1)}{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2r+1)r!} \eta^{2r-n},$$

à quoi la fonction hypergéométrique permet de donner la forme

$$(8) \quad P_n(z) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \eta^{-n} F\left(\frac{1}{2}, -n, -n + \frac{1}{2}; \eta^2\right), \quad \eta = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Nous verrons que (8) est valable quel que soit  $z$ .

Il résulte de (7) que  $P_n(\cos \theta)$  est un polynôme en  $\cos \frac{\theta}{2}$  ou en  $\sin \frac{\theta}{2}$ , et que  $P_n(\cos \theta) \cos^{-2n} \frac{\theta}{2}$  est un polynôme en  $\tan^2 \frac{\theta}{2}$  [10; 31]; de même  $P_n(\cos \theta) \cos^{-n} \theta$  est un polynôme en  $\tan \theta$ , puisque  $\frac{\cos(n-2r)\theta}{\cos^n \theta}$  a cette propriété. En fonction de  $z = \cos \theta$ , on a

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+z}{2}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-z}{2}, \quad \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-z}{1+z}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}.$$

Les développements en fonction de ces divers arguments se déduisent aisément de (3), mais nous les établirons plus loin (§ 18-21) avec une validité plus générale.

**4. Les polynômes de Legendre et l'équation de Laplace.** —  $\sqrt{1 - 2h \cos \theta + h^2}$  mesure un côté du triangle formé par les longueurs 1 et  $h$  écartées de l'angle  $|\theta|$ . Plus généralement, la distance  $\rho$  de 2 points  $A(a, b, c)$  et  $M(x, y, z)$  est, en axes rectangulaires,

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \psi + r'^2}, \quad r = OM,$$

$$r' = OA, \quad \psi = \cos \psi = \frac{ax + by + cz}{rr'}.$$

Par conséquent, si  $r < r'$ , (3) fournit un développement de la fonction harmonique fondamentale

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \psi).$$

(6) montre que le terme général au second membre est un polynôme homogène, de degré  $n$ , en  $x, y, z$ , et ce polynôme est harmonique. En particulier, faisons  $c = 1, b = \pm ia$ . Le développement de

$$r^n P_n\left(a \frac{x \pm iy}{r} + \frac{z}{r}\right)$$

par rapport à  $a$  fournit  $2n + 1$  polynômes harmoniques homogènes de degré  $n$

$$(10) \quad r^{n-m} (x \pm iy)^m P_n^{(m)}(\mu) = r^n e^{\pm im\varphi} \sin^m \theta P_n^{(m)}(\cos \theta) \quad (m = 0, 1, \dots, n),$$

où l'on a posé  $\frac{z}{r} = \cos \theta = \mu$ ,  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ .

Les  $2n + 1$  expressions (10) sont évidemment distinctes, et comme l'on démontre qu'il ne peut y avoir que  $2n + 1$  polynômes harmoniques homogènes de degré  $n$ , et linéairement distincts, l'ensemble de ceux-ci est représenté par les  $2n + 1$  fonctions sphériques (10). On peut leur substituer les polynômes réels

$$r^n \frac{\cos(m\varphi)}{\sin^m \theta} P_n^{(m)}(\cos \theta).$$

Lorsque  $r > r'$ , permutons  $r$  et  $r'$  dans (9); avec  $a = b = 0$ ,  $r' = c$ , il vient

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{r^{n+1}} P_n(\mu), \quad \mu = \frac{z}{r},$$

et par suite

$$(11) \quad P_n\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r}.$$

$m$  étant un nombre entier quelconque, désignons par le même opérateur  $D_m$  la dérivée  $m^e$  si  $m > 0$ , et, lorsque  $m < 0$ , l'intégrale  $(-m)^e$  du type utilisé au paragraphe 1. On voit que

$$D_m \frac{1}{\rho} \equiv \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} \frac{1}{\rho} = \frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} r^m r'^m (r^2 - 2rr'\nu + r'^2)^{-m - \frac{1}{2}} + \sigma(r, r', \nu),$$

où  $\sigma = 0$  pour  $m \geq 0$ , tandis que, pour  $m < 0$ ,  $\sigma$  est une fonction rationnelle de  $r'$  dont les pôles sont  $r' = 0$  d'ordre  $-m$ , et  $r' = \infty$  d'ordre  $-m - 1$ . Il résulte alors de (9) que, si  $r > r'$ ,

$$(12) \quad \frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (r^2 - 2rr'\nu + r'^2)^{-m - \frac{1}{2}} + \frac{\sigma(r, r', \nu)}{r^m r'^m} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^{n-m}}{r^{n+m+1}} P_n^{(m)}(\nu).$$

En particulier, pour  $a = b = 0$ ,  $m \geq 0$ , il vient

$$\frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} [x^2 + y^2 + (z - c)^2]^{-m - \frac{1}{2}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c^{n-m}}{r^{n+m+1}} P_n^{(m)}(\mu).$$

d'où l'on déduit immédiatement, pour  $m \geq 0$ ,

$$(13) \quad P_n^{(m)}(\mu) = \frac{(-1)^{n-m} 2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(n - m + 1)} r^{n+m+1} \frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}} \frac{1}{r^{2m+1}} \quad (n \geq |m|).$$

Pour  $m < 0$ , le second terme au premier membre de (12) ne contient que des puissances entières de  $r'$  inférieures à  $-2m$ , donc (13) est encore valable pour  $n - m \geq -2m$ , c'est-à-dire sans restriction pour le signe de  $m$ .

$\rho^{-2m-1}$  n'est généralement pas harmonique, mais

$$\rho^{-2m-1} (\alpha x + \beta y + \gamma z)^m$$

l'est si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les composantes d'un vecteur isotrope orthogonal à OA. On déduit alors de (12), pour  $r < r'$ ,

$$(13') \quad \frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^m}{\rho^{2m+1}} + \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r r'}\right)^m \sigma(r, r', \nu) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r^{n+1}} \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r r'}\right)^m P_n^{(m)}(\nu).$$

Le terme général au second membre est un polynome homogène de degré  $n$  en  $x, y, z$ , pourvu que  $n \geq |m|$ ; c'est évident si  $m > 0$ , et, pour  $m < 0$ , ça résulte de la nullité de  $P_n^{(k)}(\pm 1)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) et de ce que  $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2)$  est divisible par  $\alpha x + \beta y + \gamma z$ . Le second terme au premier membre étant soit nul, soit la somme de termes dont le degré d'homogénéité en  $x, y, z$  est inférieur à  $|m|$ , les polynomes en question au second membre sont harmoniques. Pour  $a = b = 0$ , on a  $\nu = \mu$ ,  $\beta = \pm i\alpha$ ,  $\gamma = 0$ , et l'on retrouve les polynomes harmoniques (10), avec l'extension aux valeurs  $m = -n, -n + 1, \dots, n$ . Il résulte d'ail-

leurs du paragraphe suivant que cette restriction  $|m| \leq n$  n'intéresse pas l'harmonicité de (10), et, par suite, des termes du second membre de (13'), qui s'en déduisent par rotation des axes de coordonnées.

5. **Équation différentielle de Legendre.** — En écrivant que  $r^n P_n\left(\frac{z}{r}\right)$  est harmonique, on voit tout de suite qu'il équivaut d'exprimer que  $P_n(z)$  est solution de l'équation différentielle de Legendre

$$\mathcal{L}(u) \equiv (1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0,$$

invariante quand on change  $n$  en  $-n - 1$ . C'est cette équivalence qui donne toute leur importance, non seulement aux polynômes de Legendre, mais encore à l'intégrale générale de cette équation, pour toutes les valeurs de  $n$ . En formant  $D_m \mathcal{L}(u)$ , un calcul aisé montre que les dérivées et primitives  $P_n^{(m)}(z)$  vérifient l'équation

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - z^2) \frac{d^2 u^{(m)}}{dz^2} - 2(m+1)z \frac{du^{(m)}}{dz} + (n-m)(n+m+1)u^{(m)} = 0 \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{array} \right.$$

(14) exprime que  $r^n e^{im\varphi} (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(\mu)$  est harmonique. On est ainsi conduit à considérer avec Ferrers [12] la fonction

$$(1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(\mu),$$

ou mieux, avec Hobson [20,  $\alpha$ ], pour toutes les valeurs complexes de  $z$ ,

$$(15) \quad P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(z),$$

dont nous préciserons plus loin la définition. Un calcul simple permet de déduire de (14) que  $P_n^m(z)$ , et d'une manière générale, les fonctions  $v(z)$  telles que  $r^n e^{im\varphi} v(\mu)$  soit harmonique sont les intégrales de l'équation de Legendre généralisée

$$(16) \quad (1 - z^2) \frac{d^2 v}{dz^2} - 2z \frac{dv}{dz} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] v = 0,$$

invariante quand on change  $n$  en  $-n - 1$  ou  $m$  en  $-m$ .

**6. Relations de récurrence.** — En identifiant les développements entiers en  $h$  dans les égalités

$$(1 - 2zh + h^2) \frac{\partial \mathcal{X}(z, h)}{\partial h} = (z - h) \mathcal{X}(z, h),$$

$$h \frac{\partial \mathcal{X}(z, h)}{\partial h} = (z - h) \frac{\partial \mathcal{X}(z, h)}{\partial z},$$

on obtient tout de suite, entre trois polynomes d'indices consécutifs, les deux relations de récurrence

$$(17) \quad n P_n(z) - (2n - 1) z P_{n-1}(z) + (n - 1) P_{n-2}(z) = 0,$$

$$(18) \quad z P'_n(z) - P'_{n-1}(z) - n P_n(z) = 0.$$

Dérivons (17), et remplaçons  $P'_{n-2}$  par l'expression qu'en donne (18); il vient

$$(19) \quad P'_n(z) - z P'_{n-1}(z) - n P_{n-1}(z) = 0;$$

(18) et (19) expriment un polynome en fonction de sa dérivée et de celle d'un polynome adjacent. En éliminant  $P'_{n-1}$  ou  $P'_n$  entre (18) et (19), on a les deux nouvelles relations

$$(20) \quad (z^2 - 1) P'_n(z) = n [z P_n(z) - P_{n-1}(z)] \\ = (-n - 1) [z P_n(z) - P_{n+1}(z)],$$

tandis que l'élimination de  $z P'_n$  entre (18) et la relation (19) d'indice  $n + 1$  donne

$$(21) \quad P'_n(z) - P'_{n-2}(z) = (2n - 1) P_{n-1}(z).$$

On en déduit

$$(22) \quad P'_n(z) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2n - 4s - 1) P_{n-2s-1}(z).$$

Un raisonnement classique par récurrence permet de montrer, à l'aide de (17), que les  $P_n$  forment une suite de Sturm, c'est-à-dire que les zéros de  $P_n$  sont séparés par ceux de  $P_{n-1}$ .

**7. Intégrales représentatives.** — La fonction génératrice (3) est le résidu de  $\frac{1}{F\left(t, \frac{h}{2}\right)}$  au pôle  $\frac{-1 + \sqrt{1 - 2zh + h^2}}{-h}$ . D'une manière géné-

rale, on a

$$(23) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{dt}{\Lambda t^2 + 2Bt + C} = \frac{1}{\sqrt{B^2 - \Lambda C}} \quad (A, B, C = \text{const.}),$$

où le contour fermé  $\Gamma$  entoure le seul pôle  $\tau = \frac{-B + \sqrt{B^2 - \Lambda C}}{\Lambda}$ . On peut identifier [24,  $\alpha$ ] la détermination de  $\sqrt{B^2 - \Lambda C}$  avec

$$\sqrt{1 - 2zh + h^2}$$

en prenant

$$(24) \quad A = a - a'h, \quad B = b - b'h, \quad C = c - c'h,$$

avec

$$(25) \quad b^2 - ac = b'^2 - a'c' = 1, \quad ac' + ca' - 2bb' = -2z.$$

Le premier membre de (23) est alors développable suivant les puissances croissantes ou décroissantes de  $h$ . Quand  $h$  tend vers 0,  $\tau$  tend vers  $\tau_1 = \frac{-b+1}{a}$ , et la comparaison avec (3) donne

$$(26) \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_1}^{\tau_1+1} \frac{(a't^2 + 2b't + c')^n}{(at^2 + 2bt + c)^{n+1}} dt.$$

Lorsque  $h$  tend vers l'infini,  $\tau$  tend vers  $\sigma_2 = \frac{-b'-1}{a'}$ , et la comparaison avec (3') donne

$$(26') \quad P_n(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\sigma_2}^{\sigma_2+1} \frac{(at^2 + 2bt + c)^n}{(a't^2 + 2b't + c')^{n+1}} dt.$$

Les deux autres zéros des polynomes en  $t$

$$P(t) \equiv at^2 + 2bt + c, \quad Q(t) \equiv a't^2 + 2b't + c'$$

sont  $\tau_2 = \frac{-b-1}{a}$ ,  $\sigma_1 = \frac{-b'+1}{a'}$ , et il résulte de (25) que le rapport anharmonique

$$(27) \quad R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Ce rapport anharmonique est l'invariant essentiel du rapport des deux trinomes relativement au groupe des transformations homographiques de la variable  $t$ .

La façon la plus simple de réaliser (25) et (27) consiste à faire  $\tau_1 = z$ ,  $\tau_2 = \infty$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = -1$ ; (26) prend alors la forme de Schläfli [40]

$$(28) \quad P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int^{(z+)} \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt.$$

En prenant  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \infty$ ,  $b = 1$ , il vient  $b' = z$  et  $a'c' = z^2 - 1$ ; on peut choisir  $a' = c'$ , et, avec le cercle trigonométrique  $\gamma_0$  pour contour d'intégration, poser  $t = e^{i\varphi}$ . (26) fournit ainsi l'intégrale de Laplace [26]

$$(29) \quad P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^n d\varphi \quad (z \text{ quelconque}).$$

On peut encore intégrer sur  $\gamma_0$  dans (26'), pourvu que  $|\sigma_2| < 1$ , ce qui donne

$$(29') \quad P_n(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^{-n-1} d\varphi, \quad \Re(z) < 0.$$

D'ailleurs si  $\Re(z) > 0$ , on a  $|\sigma_1| < 1$ , et l'on peut permuter les rôles de  $P(t)$  et  $Q(t)$  dans (26), en conservant  $\gamma_0$ ; au lieu de (29), il vient ainsi

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^{-n-1} d\varphi, \quad \Re(z) > 0,$$

qui se rattache à (29') à l'aide de (5).

On peut retrouver  $\mathfrak{P}(r, h)$  au second membre de (23) en partant de relations différentes de (24). Par exemple, quand  $A = C$ , on peut prendre  $\Gamma \equiv \gamma_0$  et poser  $t = e^{i\varphi}$ , ce qui donne l'intégrale de Jacobi [21, c]

$$(30) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A \cos \varphi + B} = \frac{1}{\sqrt{B^2 - A^2}}, \quad |\tau| = \left| \frac{-B + \sqrt{B^2 - A^2}}{\lambda} \right| < 1.$$

Prenons alors A et B tels que

$$\sqrt{B - \lambda} = 1 - \varepsilon h, \quad \sqrt{B + A} = \sqrt{1 - 2zh + h^2},$$

avec  $\varepsilon = \pm 1$ .  $\tau$  tend vers 0 avec  $h$  si  $\sqrt{1 - 2zh + h^2}$  a la détermination de (3), et (30) devient

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - \varepsilon h) d\varphi}{1 - 2h\xi + h^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zh + h^2}}, \quad \xi = \frac{z + \varepsilon + (z - \varepsilon) \cos \varphi}{2}.$$

Pour  $z = \cos \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) le changement de variable  $\xi = \cos \psi$  fournit, avec les deux valeurs de  $\varepsilon$ , les deux intégrales

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{(1-h) \cos \frac{\psi}{2} d\psi}{(1-2h \cos \psi + h^2) \sqrt{\cos \psi - \cos \theta}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{(1+h) \sin \frac{\psi}{2} d\psi}{(1-2h \cos \psi + h^2) \sqrt{\cos \theta - \cos \psi}}. \end{aligned}$$

Les deux facteurs de  $\frac{d\psi}{\sqrt{|\cos \psi - \cos \theta|}}$  admettent des développements connus en série entière de  $h$ , et la comparaison avec (3) donne les intégrales de Dirichlet et Mehler [10, 18, 30]

$$(31) \quad P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \theta}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi d\psi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \psi}}.$$

## CHAPITRE II.

### FONCTIONS DE LEGENDRE.

**8. Fonction de Legendre de première espèce.** — Les observations du paragraphe 5 conduisent à résoudre  $\mathcal{L}^2(u) = 0$  pour toutes les valeurs de  $n$ , même complexes. En substituant l'intégrale (28, I) dans cette équation, on constate qu'elle la vérifie pourvu que l'intégrandum soit uniforme le long du contour d'intégration  $\Gamma$ . Une solution particulière, qui se réduit au polynôme (28, I) pour  $n$  entier  $\geq 0$ , est

$$(1) \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{+\infty}^{(z+, 1+)} \frac{(t^2-1)^n dt}{(2t-2z)^{n+1}},$$

qu'on précise en choisissant

$$\arg(t-1) = \arg(t+1) = \arg(t-z) = 0 \quad \text{pour } t = +\infty;$$

elle est holomorphe dans le plan coupé par la demi-droite  $(-\infty, -1)$ . C'est la fonction de Legendre de première espèce. Elle est caractérisée, parmi les intégrales de  $\mathcal{L}^2(u) = 0$ , par la propriété d'être égale à 1 au point critique  $z = 1$  de cette équation.

La transformation homographique qui lie (26, I) à (28, I) montre que l'on a encore [24,  $\alpha$ ]

$$(2) \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(t)^n}{P(t)^{n+1}} dt,$$

pourvu que  $\Gamma$  tourne dans le sens direct autour des seuls points critiques  $\tau_1$  et  $\sigma_1$ , sans traverser la transformée de la coupure, c'est-à-dire l'arc de cercle  $\tau_2\sigma_2$  dont le prolongement passe par  $\sigma_1$ ; en outre, la détermination de l'intégrandum doit être telle qu'on ait  $P_n(1) = 1$

La symétrie de (25, I) permet de permuter  $P(t)$  et  $Q(t)$  par variation continue des coefficients, sans modifier  $\Gamma$  ni la valeur de l'intégrale pour  $z = 1$ ; cela équivaut à changer  $n$  en  $-n - 1$ , donc

$$(3) \quad P_n(z) = P_{-n-1}(z).$$

Comme au paragraphe 7, on peut prendre pour  $\Gamma$  le cercle  $\gamma_0$  pourvu que  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$  lui soit également intérieur, donc

$$(4) \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z - \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^n d\varphi, \quad \mathcal{R}(z) > 0 \quad \text{ou} \quad n \text{ entier} > 0.$$

On a  $P_n(1) = 1$  lorsque, pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , on choisit  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ .

Posons  $z = \text{ch}(\chi + i\theta)$ ,  $\chi \geq 0$ ,  $|\theta| < \pi$ ; pour  $\sqrt{z^2-1} = \text{Sh}(\chi + i\theta)$ , on a (1)  $sz \sqrt{z^2-1} = sa z$ ; on en déduit aisément

$$|z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi| \leq e^\chi,$$

et, par suite, la valeur majorante

$$(5) \quad |P_n(z)| \leq e^{n\chi}$$

( $n > 0$ ,  $\chi \geq 0$ ,  $\mathcal{R}(z) > 0$  si  $n$  non entier,  $z$  quelconque pour  $n$  entier).

**9. Développements de  $P_n(z)$ .** — Lorsque les points critiques  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\sigma_2$  sont fixes, il résulte de (27, I) que  $\sigma_1$  est une fonction homographique de  $z$ . Les conditions (25, I) permettent alors de donner à (2) la forme [24,  $\alpha$ ]

$$P_n(z) = \left[ \frac{2(z-z_0)}{1-z_0^2} \right]^n \frac{1}{\pi ia} \int_{\Gamma} \frac{(t-\sigma_1)^n}{(t-\tau_1)^{n+1}} \frac{(t-\sigma_2)^n}{(t-\tau_2)^{n+1}} dt,$$

---

(1) Nous posons  $sa z = \text{signe de l'argument de } z$ .

où  $\alpha$  et  $z_0$  sont arbitraires et indépendants de  $z$ , et  $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{2(z-z_0)}{1-z_0^2}$ ;  
 on voit alors aisément que  $\frac{\sigma_2-\tau_1}{\tau_2-\tau_1} = \frac{1+z_0}{2}$  et  $\frac{\sigma_2-\tau_1}{\sigma_1-\tau_1} = \frac{z-z_0}{z-1}$ . Supposons que  $\sigma_1$  soit assez voisin de  $\tau_1$  pour qu'on puisse choisir  $\Gamma$  avec  $|t-\tau_1| > |\sigma_1-\tau_1|$ ;  $(t-\sigma_1)^n$  est alors développable en série entière de  $\sigma_1-\tau_1$ , et l'on obtient le développement général

$$(6) \quad P_n(z) = \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \times F\left(n+1, -k, n-k+1; \frac{1+z_0}{2}\right) \left(\frac{z-1}{z-z_0}\right)^k,$$

dont les coefficients sont des polynomes hypergéométriques en  $\frac{1+z_0}{2}$ , et qui converge uniformément dans le domaine

$$(7) \quad \left|\frac{z-1}{z-z_0}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{2}{1+z_0}\right| \quad (z_0 \neq 1).$$

Aux valeurs  $z_0 = -1$  et  $\infty$  correspondent les expressions hypergéométriques remarquables

$$(8) \quad P_n(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k \quad [\mathcal{R}(z) > 0],$$

$$(9) \quad P_n(z) = F\left(-n, n+1, 1; \frac{1-z}{2}\right).$$

Cette dernière expression, établie par Murphy [31] pour  $n$  entier  $> 0$ , peut encore s'écrire (1)

$$(9') \quad P_n(z) = F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, 1; 1-z^2\right) \quad [\mathcal{R}(z) > 0],$$

grâce à la transformation de Kummer

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}; x\right) = F\left(\alpha, \beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, 4x(1-x)\right),$$

$$|x| < \frac{1}{2}, \quad |4x(1-x)| < 1.$$

On peut également développer (4) en série entière de  $1 - \frac{1}{z^2}$

(1) La restriction  $\mathcal{R}(z) > 0$  résulte de ce que la coupure de la fonction hypergéométrique au second membre de (9') est l'axe imaginaire.

quand  $\left| 1 - \frac{1}{z^2} \right| < 1$ , ce qui donne

$$(10) \quad P_n(z) = z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}, 1; 1 - \frac{1}{z^2}\right) \quad [\Re(z) > 0].$$

En particulier, quand  $z$  tend vers l'infini dans cette région,

$$(11) \quad P_n(z) \sim z^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad \left[\Re(n) > -\frac{1}{2}\right].$$

**10. Fonction de Legendre de deuxième espèce.** — L'intégrandum de (1) est également uniforme lorsque  $\Gamma$  tourne en sens contraire autour de  $t = 1$  et  $t = -1$ , sans entourer  $t = z$ . Quand  $\Re(n) > -1$ , on peut substituer à  $\Gamma$  le segment  $(-1, 1)$  et considérer l'intégrale de forme simple

$$(12) \quad Q_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^n dt}{(2z-2t)^{n+1}} \quad [\Re(n) > -1],$$

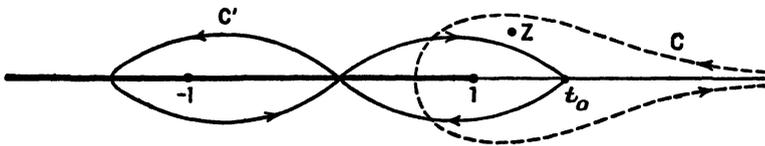
avec  $|\arg z| < \pi$ ,  $\arg(1-t) = \arg(1+t) = 0$ . On est ainsi conduit, dans le cas général, à adopter, pour deuxième intégrale fondamentale de  $\mathcal{L}(u) = 0$ , la fonction de Legendre de seconde espèce

$$(13) \quad Q_n(z) = \frac{1}{2i \sin n\pi} \int_{C'} \frac{(t^2-1)^n dt}{(2z-2t)^{n+1}},$$

où  $C'$  est le huit dessiné sur la figure (1), avec

$$\arg(t_0-1) = \arg(t_0+1) = 0, \quad |\arg(z-t_0)| < \pi.$$

Fig. 1.



Cette fonction est holomorphe dans le plan coupé par la demi-droite  $(-\infty, 1)$ . Par continuité, (13) a encore un sens pour

(1) Le contour  $C$  de l'expression (1) de  $P_n(z)$  est représenté en pointillé.

$n$  entier  $\geq 0$ ; pour  $n$  entier  $< 0$ , on convient d'identifier  $Q_n$  avec  $Q_{-n-1}$

Observons en passant que lorsqu'on vérifie les formules de récurrence du paragraphe 6, en substituant aux  $P_n$  leurs expressions (1), on est conduit à annuler une intégrale de contour  $C$ , dont l'intégrandum est de la forme  $(t^2 - 1)^{m-1} (t - z)^{-m-p-1} F(t)$ , où  $m$  est un entier variable avec  $n$ ,  $p$  un entier fixe, et  $F(t)$  un polynome de degré supérieur à 1. Il existe donc un polynome  $G(t)$  tel que

$$\frac{(t^2 - 1)^{m-1} F(t)}{(t - z)^{n+p+1}} \equiv \frac{d}{dt} \frac{(t^2 - 1)^m G(t)}{(t - z)^{m+p}}, \quad d^0 G = d^0 F - 2,$$

de sorte que la primitive du second membre est encore uniforme, quel que soit  $m$ , le long de  $C$ . et même de  $C'$ . On en conclut que ces formules de récurrence sont valables, quel que soit  $n$ , pour les fonctions de Legendre des deux espèces.

A l'expression (2) de  $P_n$  correspond la transformation de (13) en (1)

$$(14) \quad Q_n(z) = \frac{e^{(1-n)\pi i}}{2i \sin n\pi} \int_{\Gamma'} \frac{Q(t)^n}{P(t)^{n+1}} dt,$$

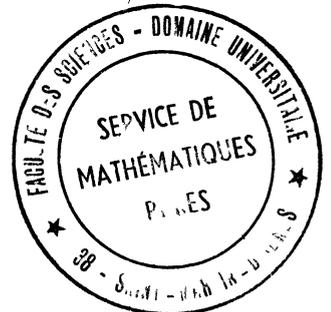
où  $\Gamma'$  est un huit, inverse autour de  $\sigma_1$ . direct autour de  $\sigma_2$ , qui ne traverse pas l'arc de cercle  $\tau_1 \tau_2$  dont le prolongement passe par  $\sigma_1$ ; l'égalité n'a lieu qu'à un facteur près de la forme  $e^{2kn\pi i}$  quand on ne précise pas l'argument de  $\frac{Q(t)}{P(t)}$ . En particulier, si  $\sigma_1 = \infty$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\tau_1 \tau_2 = 1$ , on peut prendre pour  $\Gamma'$  le contour  $[+\infty, i\infty, -\infty (0+), -\infty, -i\infty, +\infty]$  formé par le cercle  $|z| = \infty$  et le demi-axe  $t < 0$  parcouru deux fois en sens contraires. L'intégrale le long du grand cercle est nulle quand  $\mathcal{R}(n+1) > 0$ , et, en posant  $|t| = e^\psi$  le long du chemin réel, il vient

$$(15) \quad Q_n(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^{-n-1} d\psi \quad [\mathcal{R}(n+1) > 0];$$

la comparaison avec (12) pour  $z = \infty$  montre qu'on doit prendre

$$|\arg(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)| < \pi, \quad sa \sqrt{z^2 - 1} = sa z.$$

(1) (25, I) sont satisfaites par  $t^2 - 1$  et  $2t - 2z$  et non par  $t^2 - 1$  et  $2z - 2t$ , ce qui fait apparaître le facteur  $e^{(1-n)\pi i}$ .



Avec les notations de (5), on voit que

$$|z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi| \geq \operatorname{ch} \chi + \operatorname{sh} \chi \operatorname{ch} \psi \geq e^\chi,$$

donc

$$(16) \quad |Q_n(z)| \leq e^{-n\chi} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\operatorname{ch} \chi + \operatorname{sh} \chi \operatorname{ch} \psi} = e^{-n\chi} Q_0(\operatorname{ch} \chi) \quad (n > 0, \chi \geq 0).$$

Pour  $|z| > 1$ , (13) est développable en série entière de  $\frac{1}{z}$ , savoir (1)

$$(17) \quad Q_n(z) = \frac{z^{-n-1}}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2} + 1, n + \frac{3}{2}; z^{-2}\right) \quad (|\arg z| < \pi).$$

Par suite,

$$(18) \quad Q_n(-z) = e^{-(n+1)\pi i s a z} Q_n(z).$$

$Q_n$  est l'intégrale de  $\mathcal{L}(u) = 0$  qui est équivalente, quand  $z$  tend vers l'infini, à

$$(19) \quad \frac{z^{-n-1}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}.$$

On en conclut que  $Q_n^{(m)}(x)$  vérifie (14, I), pour les valeurs entières de  $m \geq -\mathcal{R}(n)$ , si l'on définit les primitives par les intégrales

$$\int_\infty^x \cdots \int_\infty^x Q_n(x) (dx)^{-m},$$

analogues aux intégrales représentant  $P_n^{(m)}$ , à la substitution près du point critique  $\infty$  au point critique 1 utilisé comme limite inférieure. Pour  $n$  entier  $> 0$ , la formule de Rodrigues (4, I) donne un intérêt particulier à l'équation (14, I) d'indice  $m = -n$ . L'une des intégrales de cette équation est  $(x^2 - 1)^n$ , et une autre est

$$(x^2 - 1)^n \int_x^\infty (x^2 - 1)^{-n-1} dx.$$

Compte tenu de la valeur asymptotique (19), on aboutit ainsi à la formule

$$(20) \quad Q_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (x^2 - 1)^n \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2 - 1)^{n+1}} \right\} \\ (x > 1, n \text{ entier} > 0).$$

(1)  $B(a, b, c; x)$  désigne la fonction hypergéométrique  $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; x)$ .

$Q_{-n-1}^{(-n)}$  vérifie la même équation différentielle que  $Q_n^{(-n)}$ ; donc l'équation (14, I) de  $Q_n^{(n+1)}$  est vérifiée par  $(x^2 - 1)^{-n-1}$ , d'où l'on déduit immédiatement

$$(21) \quad Q_n(x) = (2n)!! \int_x^\infty \dots \int_x^\infty (x^2 - 1)^{-n-1} (dx)^{n+1}$$

$(x > 1, n \text{ entier} > 0).$

**11. Relations entre les fonctions des deux espèces.** —  $P_n, Q_n, Q_{-n-1}$  vérifient  $\mathcal{L}^2(u) = 0$  et sont distinctes quand  $n$  n'est pas entier. Compte tenu de (3), il existe donc une relation de la forme

$$P_n = A(n) Q_n + \Lambda(-n-1) Q_{-n-1},$$

où  $A(n)$  est fonction de  $n$ , et analytique.

Pour  $\mathcal{R}(n) > 0$  l'identification des parties principales (11) et (19) donne  $A(-n-1) = -\frac{1}{\pi} \text{tang } n\pi$ , et, par suite,

$$(22) \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi} \text{tang } n\pi [Q_n(z) - Q_{-n-1}(z)].$$

**12. En faisant le changement d'inconnue  $u = P_n w$ , on voit que l'intégrale générale de  $\mathcal{L}^2(u) = 0$  est de la forme**

$$(23) \quad u = A P_n(z) + B P_n(z) \int_x^z \frac{dz}{(1-z^2) P_n(z)^2}.$$

Pour  $n$  entier  $\geq 0$ , l'intégrandum est une fonction rationnelle;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  étant les zéros de  $P_n$ , on a (1) [20, h]

$$\frac{1}{(1-z^2) P_n(z)^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) + \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r}{(z-\alpha_r)^2},$$

donc

$$(24) \quad P_n(z) \int_x^z \frac{dz}{(1-z^2) P_n(z)^2} = \frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1} - S_n(z)$$

$[|\arg(z+1)| \leq \pi, |\arg(z-1)| \leq \pi],$

(1) L'absence de terme en  $\frac{1}{z-\alpha_r}$  résulte immédiatement de l'égalité

$$(1-\alpha_r^2) P_n''(\alpha_r) - 2\alpha_r P_n'(\alpha_r) = 0,$$

qui est une conséquence évidente de  $\mathcal{L}(u) = 0$ .

où  $S_n(z) = P_n(z) \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r}{z - \alpha_r}$  est un polynome de degré  $n - 1$ . (24) étant infiniment petit à l'infini ne diffère de  $Q_n$  que par un facteur constant et  $S_n$  est la partie principale du développement à l'infini de

$$\frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1}.$$

En posant (voir 6, I)  $P_n(z) = \sum A_s z^{n-2s}$ , la partie principale de (24), c'est-à-dire le terme en  $z^{-n-1}$  du développement du premier terme au second membre, est égale à

$$\begin{aligned} z^{-n-1} \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n}{2}} \frac{A_s}{2n-2s+1} &= z^{-n-1} \int_0^1 x^n P_n(x) dx \\ &= \frac{z^{-n-1}}{2A_0} \omega_n = z^{-n-1} \frac{n!}{(2n+1)!!}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(25) \quad Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1} - S_n(z)$$

dans le plan coupé par  $(-1, 1)$ .

Compte tenu de (22, I), on déduit de (25) que

$$\mathcal{L}[S_n(z)] = 2P'_n(z) = 2 \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n-1}{2}} (2n-4s-1) P_{n-2s-1}(z),$$

donc, sachant que  $\mathcal{L}(P_{n-p}) \equiv p(2n-p+1)P_{n-p}$ , il vient [7]

$$(26) \quad S_n(z) = \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n-1}{2}} \frac{2n-4s-1}{(2s+1)(n-s)} P_{n-2s-1}(z).$$

(25) s'écrit encore

$$\begin{aligned} Q_n(z) + S_n(z) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(z)}{z-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t} dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt. \end{aligned}$$

La première intégrale du dernier membre est un polynome de degré

$n - 1$ , la suivante vérifie l'équation de Legendre, donc cette égalité se décompose en

$$(27) \quad Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt,$$

$$(28) \quad S_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t} dt \quad [S_n(-z) = (-1)^{n-1} S_n(z)].$$

L'intégrandum de (28) est un polynome de degré  $n - 1$ , donc

$$0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(t) \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t} dt = P_n(z) Q_n(z) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)^2}{z-t} dt.$$

Il résulte de là que lorsque  $z$  est réel,  $> 1$  ou  $< -1$ ,  $Q_n$  ne peut s'annuler; d'autre part, si  $z = x + iy$ ,

$$P_n(z) Q_n(z) - P_n(\bar{z}) Q_n(\bar{z}) = \frac{y}{i} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)^2}{(x-t)^2 + y^2}$$

ne peut s'annuler si  $y \neq 0$ , donc [42] zéro est valeur exceptionnelle de  $Q_n(z)$  dans le plan coupé par  $(-1, 1)$ .

13. Grâce à ces résultats,  $(1, 0)$  s'écrit

$$A_r = -2 \frac{Q_n(\alpha_r)}{P_n'(\alpha_r)} = 2 \frac{S_n(\alpha_r)}{P_n'(\alpha_r)},$$

et, si

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

l'erreur de la quadrature approchée s'écrit

$$(29) \quad E(f) = \sum_{\nu=2n}^{\infty} a_{\nu} E(x^{\nu}),$$

avec

$$E(x^{\nu}) = \int_{-1}^1 x^{\nu} dx - 2 \sum_{r=1}^n \frac{S_n(\alpha_r)}{P_n'(\alpha_r)} \alpha_r^{\nu}.$$

En particulier, les parités des fonctions  $S_n$  et  $P_n'$  montrent que  $E(x^{2\nu+1}) = 0$ , et l'on en déduit que

$$(30) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E(x^{\nu})}{z^{\nu+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2}{2^{\nu+1}} \frac{1}{z^{2\nu+1}} - 2 \sum_{r=1}^n \frac{S_n(\alpha_r)}{P_n'(\alpha_r)} \frac{1}{z - \alpha_r} = 2 \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}.$$

Ainsi, (29) représente un développement de l'erreur dont les termes sont déterminés par la fonction génératrice (30). On peut montrer [20, h, p. 83] que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f) = 0$ , si le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  surpasse 1.

14. Reprenons (25) sous la forme

$$\frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{S_n(z)}{P_n(z)} = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)}.$$

$\frac{Q_n}{P_n} = O(z^{-2n-1})$  quand  $z$  tend vers l'infini, donc  $\frac{S_n}{P_n}$  est la  $n^e$  réduite de la fraction continue représentative du développement asymptotique

$$\sum_0^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{2n+1}$$

du terme logarithmique. Cette fraction est de la forme

$$\frac{a_1}{q_1(z)+} \frac{a_2}{q_2(z)+} \cdots \frac{a_n}{q_n(z)+} \cdots \quad [a_n = \text{const.}, d^0 q_n(z) = 1],$$

avec  $a_1 = 1$ ,  $q_1(z) = z$ , et avec la relation récurrente

$$P_n(z) = q_n(z) P_{n-1}(z) + a_n P_{n-2}(z).$$

La comparaison avec (17, I) entraîne donc, pour  $n \geq 2$ ,

$$q_n = \frac{2n-1}{n} z, \quad a_n = -\frac{n-1}{n},$$

de sorte que la fraction continue en question [14, 17a. 21a] est

$$\frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z-} \frac{c_1}{z-} \cdots \frac{c_n}{z-} \cdots \quad c_n = \frac{n^2}{4n^2-1}.$$

15. Écrivons les deux relations (17, I) commençant par  $nP_n(z)$  et  $nP_n(t)$ , ou  $nP_n(z)$  et  $nQ_n(t)$ , ou  $nQ_n(z)$  et  $nQ_n(t)$ . On en déduit trois relations du type

$$\begin{aligned} & (2n-1) P_{n-1}(z) P_{n-1}(t) (z-t) \\ &= n [P_n(z) P_{n-1}(t) - P_n(t) P_{n-1}(z)] \\ & \quad - (n-1) [P_{n-1}(z) P_{n-2}(t) - P_{n-1}(t) P_{n-2}(z)], \end{aligned}$$

et, par récurrence [7, 13]

$$(31) \quad m \frac{P_m(z) P_{m-1}(t) - P_m(t) P_{m-1}(z)}{z - t} = \sum_{n=0}^{m-1} (2n + 1) P_n(z) P_n(t),$$

$$(32) \quad m \frac{P_m(z) Q_{m-1}(t) - Q_m(t) P_{m-1}(z)}{z - t} \\ = \frac{1}{z - t} + \sum_{n=0}^{m-1} (2n + 1) P_n(z) Q_n(t),$$

$$(33) \quad m \frac{Q_m(z) Q_{m-1}(t) - Q_m(t) Q_{m-1}(z)}{z - t} \\ = \frac{1}{2(z - t)} \log R(z, t, -1, 1) + \sum_{n=0}^{m-1} (2n + 1) Q_n(z) Q_n(t);$$

il est tenu compte des valeurs particulières

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \log \frac{z + 1}{z - 1}, \quad Q_1(z) = z Q_0(z) - 1.$$

Pour  $z = t$ , il résulte de (32) que

$$\frac{Q_m(z)}{P_m(z)} - \frac{Q_{m-1}(z)}{P_{m-1}(z)} = - \frac{1}{m P_m(z) P_{m-1}(z)},$$

donc, d'après (25),

$$\frac{S_n(z)}{P_n(z)} = Q_0(z) - \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m P_m(z) P_{m-1}(z)}.$$

Posons  $z = \operatorname{ch}(\chi + i\theta)$ ,  $t = \operatorname{ch}(\sigma + i\tau)$ ,  $\chi \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $|\theta| < \pi$ ,  $|\tau| < \pi$ . Il résulte de (5) et (16) que les premiers membres de (32) et (33) sont respectivement majorés par  $m e^{m(\chi - \sigma)}$  et  $m e^{-m(\chi + \sigma)}$ , à un facteur près indépendant de  $m$ . On déduit ainsi de (32) l'identité [17: a, b]

$$(34) \quad \frac{1}{t - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(z) Q_n(t) \quad (\chi < \sigma),$$

la convergence étant uniforme si  $\liminf(\sigma - \chi) > 0$ . D'une manière générale,  $f(t)$  étant holomorphe dans l'ellipse  $\varepsilon$  fermée, d'équation  $\sigma = \operatorname{const.}$ , on a [32, a; 43]

$$(35) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon} \frac{f(t)}{t - z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

avec  $\chi < \sigma$ ,

$$(36) \quad a_n = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_{C_+} f(t) Q_n(t) dt,$$

et où  $C$  est un contour quelconque <sup>(1)</sup> entourant  $(-1, 1)$ . C'est le *développement de Neumann en série de polynomes de Legendre d'une fonction holomorphe dans une ellipse de foyers 1 et -1*. Grâce à la convergence uniforme de (35) sur  $-1 \leq z \leq 1$  et à l'orthogonalité des polynomes  $P_n$ , on a encore

$$(37) \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(z) P_n(z) dz.$$

Dans tout domaine de variation de  $z$  et  $t$  situé à distance non nulle de  $(-1, 1)$ , on déduit de même de (33) le développement uniforme [13]

$$(38) \quad \frac{1}{2(t-z)} \log R(t, z, 1, -1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(z) Q_n(t),$$

et, avec les mêmes hypothèses sur  $f$  que pour (35), et l'expression (36) ou (37) de  $a_n$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f(t)}{2(t-z)} \log R(t, z, 1, -1) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z).$$

On peut réduire  $C$  à la double coupure  $(-1, 1)$ , et il reste

$$(39) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{z-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z).$$

**16. Fonction génératrice des  $Q_n(z)$ .** —  $n$  étant toujours entier  $\geq 0$ , (25) donne, pour  $-1 < \mu < 1$ ,

$$Q_n(\mu \pm 0i) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \left( \text{Log} \frac{1+\mu}{1-\mu} \mp i\pi \right) - S_n(\mu).$$

On en déduit

$$(40) \quad Q_n(\mu + 0i) - Q_n(\mu - 0i) = -i\pi P_n(\mu),$$

<sup>(1)</sup> Pourvu que  $f(t)$  soit holomorphe à l'intérieur et continue sur lui.

et l'on adopte, pour valeur de  $Q_n$  sur la coupure  $(-1, 1)$ ,

$$(41) \quad Q_n(\mu) = \frac{1}{2} [Q_n(\mu + 0i) + Q_n(\mu - 0i)] = \frac{1}{2} P_n(\mu) \operatorname{Log} \frac{1+\mu}{1-\mu} - S_n(\mu).$$

D'autre part, si  $z = \operatorname{ch}(\chi + i\theta)$ ,  $\sum Q_n(z)h^n$  converge si  $|h| < ex$  et fournit, grâce à (27), la fonction génératrice

$$Q(z, h) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z)h^n = \frac{1}{2\sqrt{1-2zh+h^2}} \log \frac{z-h+\sqrt{1-2zh+h^2}}{z-h-\sqrt{1-2zh+h^2}},$$

où l'argument de la dernière fraction est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$  pour  $h = 0$ . Quand  $z$  vient sur la coupure, on a donc

$$(42) \quad Q(\mu, h) = \frac{1}{2\sqrt{1-2\mu h+h^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1-2\mu h+h^2}+\mu-h}{\sqrt{1-2\mu h+h^2}-\mu+h}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\mu h+h^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1-2\mu h+h^2}+\mu-h}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

convergeant pour  $|h| < 1$ . Avec les notations du paragraphe 4, et en remplaçant  $\mu = \cos\psi$  par sa valeur en fonction des côtés, ce développement s'interprète de manière remarquable pour un triangle AOM, sous la forme

$$\frac{1}{2AM} \operatorname{Log} \frac{(OM+MA-OA)(OM+OA-MA)}{(OA+AM+OM)(OA+AM-OM)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{OA^n}{OM^{n+1}} Q_n(\widehat{\cos AOM}),$$

(OA < OM).

Si  $a = b = 0$ ,  $r' = c < r$ , la dernière expression (42) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{r^{n+1}} Q_n\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}} \log \frac{z-c+\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

d'où résulte la formule analogue à (11, I) :

$$(43) \quad Q_n\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \log \frac{z+r}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

La fonction entre parenthèses est harmonique, et sa dérivation par

la formule de Leibniz, compte tenu de (11, I), donne

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \operatorname{Log} \frac{1+\mu}{1-\mu} - \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} P_{s-1}(\mu) P_{n-s}(\mu),$$

qui fournit une nouvelle expression de  $S_n(z)$ .

### CHAPITRE III.

#### LES FONCTIONS DE LEGENDRE GÉNÉRALISÉES.

**17. Les fonctions de Hobson.** — On a vu au paragraphe § l'intérêt que présentent les fonctions (15, I) associées aux dérivées, d'ordre entier positif ou négatif, de  $P_n(z)$ . Il en est de même pour les fonctions associées de manière analogue à  $Q_n(z)$ . Enfin, comme le suggèrent le même paragraphe et certains problèmes pratiques de potentiel, il est utile de lever toute restriction relative à  $m$ . Pour  $m$  entier, on déduit de (1, II) :

$$(1) \quad P_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(z+, 1+)} \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n (t-z)^{-m-n-1} dt.$$

Pour que l'intégrandum reste uniforme quel que soit  $m$ , Hobson [20,  $\alpha$ ] substitue au double lacet le quadruple lacet  $(z+, 1+, z-, 1-)$ , ce qui donne de (1) l'expression généralisée

$$(2) \quad P_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{e^{-n\pi i}}{4\pi \sin n\pi} \\ \times \int_{+\infty}^{(z+, 1+, z-, 1-)} \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n (t-z)^{-m-n-1} dt;$$

on précise les arguments comme pour (1, II), et on lève les indéterminations possibles par continuité. On précise enfin la détermination de (15, I) en prenant  $|\arg(z-1)| < \pi$ ,  $|\arg(z+1)| < \pi$ .

Lorsque  $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ , le changement de variable  $t-1 = (z-1)u$  permet de développer (2) en série entière de  $\frac{z-1}{2}$ , et un calcul simple donne

$$(3) \quad P_n^m(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, n+1, -m+1; \frac{1-z}{2}\right),$$

uniforme dans le plan coupé par  $-\infty < z \leq 1$ . On voit que

$$(4) \quad P_n^m(z) = P_{n-1}^m(z).$$

Pour  $m$  entier  $> 0$ , les  $m$  premiers termes de la série hypergéométrique disparaissent, et l'on a encore

$$(3') \quad P_n^m(z) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(m+1)} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m} \\ \times F\left(m-n, m+n+1, m+1; \frac{1-z}{2}\right) \quad (m \text{ entier } > 0).$$

Pour  $m$  entier  $< 0$ , on vérifie aisément sur (3), que  $P_n^{(m)}(z)$  est la primitive  $\int_1^z \dots \int_1^z P_n(z) (dz)^{-m}$ , valable dans le plan coupé (1).

Le long du contour  $C'$ , l'intégrandum dans l'égalité

$$(5) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m-n)} \frac{1}{4i \sin n\pi} \int_{C'} \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n (z-t)^{-m-n-1} dt,$$

où  $m$  est entier  $\geq -\mathcal{R}(n)$ , est uniforme quel que soit  $m$ ; c'est par cette intégrale qu'on définit la dérivée d'ordre quelconque de  $Q_n(z)$ . Comme il a été fait au paragraphe 10, on peut remplacer (5), pour  $\mathcal{R}(n) > -1$ , par

$$(5') \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(-n)}{2\Gamma(-m-n)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^n (z-t)^{-m-n-1} dt, \\ [\mathcal{R}(n) > -1].$$

La fonction de Legendre généralisée de deuxième espèce est alors

$$(6) \quad Q_n^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}} Q_n^{(m)}(z) \quad |\arg(z-1)| < \pi, |\arg(z+1)| < \pi.$$

Lorsque  $|z| > 1$ , le second membre de (5) est développable en une série entière de  $\frac{1}{z}$ , dont les coefficients  $\int_{C'} (t^2-1)^n t^r dt$  sont du type eulérien, et valent 0 ou  $2i \sin n\pi B\left(n+1, \frac{r+1}{2}\right)$  suivant que  $r$  est pair ou impair. Il vient ainsi

$$(7) \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{2^{m-1}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^{m+n+1}} \\ \times B\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n}{2} + 1, n + \frac{3}{2}; z^{-2}\right) \\ (|\arg z| < \pi),$$

---

(1) Pour abrégé, nous sous-entendons la coupure fondamentale  $-\infty < z \leq 1$ .

dont le domaine d'uniformité est celui de  $P_n^m$ . Telle est la définition de Barnes [2], différant de celle de Hobson [20, a] par le facteur  $\frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi}$  au lieu de  $e^{m\pi i}$ . Elles coïncident pour  $m$  entier; celle de Hobson existe seule pour  $n$  entier (<sup>1</sup>), mais fournit des relations d'un caractère moins simple que celle de Barnes. Pour  $m$  entier  $< 0$ , on vérifie aisément sur (7) que, si  $-m \leq \mathcal{R}(n)$ , on a, dans le plan coupé,

$$Q_n^{(m)}(z) = \int_z^\infty \cdots \int_z^\infty Q_n(z) (dz)^{-m}.$$

(7) montre également que

$$(8) \quad Q_n^m(-z) = -e^{n\pi i(saz)} Q_n^m(z),$$

et, grâce à la transformation [48, p. 286], valable dans le plan coupé par  $z \geq 1$ ,

$$(9) \quad F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; z) \\ (|\arg(1-z)| < \pi),$$

$$(10) \quad \frac{Q_n^{-m}(z)}{\Gamma(-n-m)} = \frac{Q_n^m(z)}{\Gamma(-n+m)}.$$

**18. Relations entre  $P_n^m$  et  $Q_n^m$ .** — Arg  $z$  étant positif, désignons par L, M, N les valeurs de l'intégrale au second membre de (2) et (5) le long des lacets directs d'origine  $+\infty$  et de sommets respectifs  $z, 1, -1$ ; chacun de ces lacets est au-dessus du suivant, et les déterminations initiales sont celles déjà adoptées; soit N' la valeur de cette intégrale le long du troisième lacet lorsqu'il est placé entre les deux autres. On voit aisément [20, a] que

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{e^{-n\pi i}}{4\pi \sin n\pi} [(1-e^{2n\pi i})L - (1-e^{-2(m+n)\pi i})M], \\ Q_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{e^{-(m+n)\pi i} \sin(m+n)\pi}{4i \sin^2 n\pi} (M-N), \\ M-N = (M-N')e^{-2n\pi i}. \end{array} \right.$$

---

(<sup>1</sup>) Par exemple, le facteur  $\frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi}$  est indéterminé au voisinage de tout couple de valeurs entières de  $m, n$ ; l'équivalence avec la fonction de Hobson est assurée pourvu que  $m - \lim. m$  soit infiniment petit par rapport à  $n - \lim. n$ .

L'élimination de M et N donne

$$P_n^{(m)}(z) - e^{n\pi i} \frac{2 \sin n \pi}{\pi} Q_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{e^{-n\pi i}}{4\pi \sin n \pi} [(1 - e^{2n\pi i})L - (1 - e^{2(m+n)\pi i}N)],$$

qui ne diffère du second membre de la première équation (11) que par la substitution du troisième lacet au deuxième lacet; le procédé qui rattache (3) à (2) fournit sa valeur

$$- e^{n\pi i} (z+1)^{-m} F\left(-n, n+1, -m+1; \frac{1+z}{2}\right).$$

En raisonnant de même quand  $\arg z < 0$ , on obtient l'identité générale

$$(12) \quad Q_n^m(z) = \frac{\pi}{2 \sin n \pi} \frac{1}{\Gamma(1-m)} \times \left[ e^{-n\pi i} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, n+1, -m+1, \frac{1-z}{2}\right) - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, n+1, -m+1, \frac{1+z}{2}\right) \right].$$

Éliminons la deuxième fonction hypergéométrique entre cette expression et celle relative à  $Q_{n-1}^m(z)$ ; il vient l'identité

$$(13) \quad P_n^m(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tang} n \pi [Q_n^m(z) - Q_{n-1}^m(z)],$$

valable même pour  $n$  entier, grâce à laquelle nous nous dispenserons souvent d'expliciter l'expression de  $P_n^m$  lorsqu'on l'aura fait pour  $Q_n^m$ . En particulier, on voit, grâce à (7), que  $P_n^m$  n'est pas distinct de  $Q_{n-1}^m$  pour  $m+n$  entier  $\geq 0$ , et de  $Q_n^m$  pour  $m-n$  entier  $\geq 0$ .

(4), (8), (10), (13) fournissent des relations entre les 8 fonctions de Legendre généralisées vérifiant la même équation (16, I). De (8) et (13), on déduit encore

$$(14) \quad P_n^m(-z) = e^{-n\pi i} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m P_n^m(z) - \frac{2 \sin n \pi}{\pi} Q_n^m(z),$$

et, de (10) et (13) relatives aux indices  $\pm m$ ,

$$(15) \quad P_n^m(z) - \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} P_n^{-m}(z) = \frac{2 \sin m \pi \sin n \pi}{\pi \sin(m+n)\pi} Q_n^m(z).$$

19. Lorsque  $|z - 1| > 2$ , (5) est développable en une série entière de  $\frac{1}{z-1}$ , dont les coefficients  $\int_G (t+1)^n (t-1)^{n+r} dt$  sont du type eulérien et valent  $(-1)^r (2i \sin n\pi) 2^{2n+r+1} B(n+1, n+r+1)$ ; il vient ainsi

$$(16) \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} \\ \times B\left(n+1, m+n+1, 2n+2; \frac{2}{1-z}\right),$$

puis à l'aide de (8) et (10),

$$(17) \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{z+1}\right)^{n+1} \\ \times B\left(n+1, m+n+1, 2n+2; \frac{2}{1+z}\right);$$

$$(16') \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} \\ \times B\left(n+1, n-m+1, 2n+2; \frac{2}{1-z}\right),$$

$$(17') \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{z+1}\right)^{n+1} \\ \times B\left(n+1, n-m+1, 2n+2; \frac{2}{1+z}\right).$$

La transformation <sup>(1)</sup> [48, p. 291]

$$(18) \quad B(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a+b-c+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \\ \times [B(a, b, a+b-c+1; 1-z) - (1-z)^{c-a-b} \\ \times B(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z)]$$

permet de déduire aisément de (13) et (17')

$$(19) \quad P_n^m(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{z+1}\right)^{n+1} \\ \times F\left(n+1, n-m+1, 1-m; \frac{z-1}{z+1}\right),$$

qu'on peut encore transformer en changeant  $n$  en  $-n-1$ .

---

<sup>(1)</sup> Cette transformation est valable dans le plan coupé par les deux demi-droites  $z \leq 0$  et  $z \geq 1$ , avec la détermination  $|\arg(1-z)| < \pi$ , et en supposant que  $c-a-b$  n'est pas un nombre entier.

Supposons  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ . La transformation (1) [48, p. 289]

$$(20) \quad B(a, b, c; z) = \frac{\sin(c-a)\pi}{\sin(b-a)\pi} (-z)^{-a} B(a, a-c+1, a-b+1; \frac{1}{z}) \\ + \frac{\sin(c-b)\pi}{\sin(a-b)\pi} (-z)^{-b} B(b, b-c+1, b-a+1; \frac{1}{z})$$

donne, à partir de (7),

$$(21) \quad Q_n^{(m)}(z) = 2^{m-1} \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \left[ e^{-\frac{m+n+1}{2}\pi i(saz)} \sin\left(\frac{m-n}{2}\pi\right) \right. \\ \times B\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m-n}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) \\ + e^{-\frac{m+n}{2}\pi i(saz)} \cos\left(\frac{m-n}{2}\pi\right) z \\ \left. \times B\left(\frac{m+n}{2}+1, \frac{m-n+1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)\right],$$

que (8) prolonge dans tout le plan coupé par l'axe réel. Grâce à (13), on en déduit

$$(22) \quad P_n^{(m)}(z) = \frac{2^m e^{-m\pi i(saz)}}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{m-n}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{m+n}{2}\pi\right) \right. \\ \times B\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m-n}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) \\ + \sin\left(\frac{m+n}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{m-n}{2}\pi\right) \\ \left. \times z B\left(\frac{m+n}{2}+1, \frac{m-n+1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)\right].$$

Transformons les deux termes au second membre à l'aide de (9); on démontre ainsi (2), pour  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ ,

$$(23) \quad P_n^{(m)}(z) = \frac{2^{-m-1}(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(-n-m)} \\ \times \left[ B\left(\frac{n-m+1}{2}, \frac{-n-m}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) \right. \\ \left. - z B\left(\frac{n-m}{2}+1, \frac{-n-m+1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)\right],$$

(1) Le domaine de validité est le plan coupé par la demi-droite  $0 \leq z$ , avec la détermination  $|\arg(-z)| < \pi$ .

(2) On utilise également l'identité classique

$$\Gamma(2z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

qui se prolonge dans le plan coupé par l'axe réel. Quand  $\mathcal{R}(z) > 0$ , (18) transforme enfin (23) en l'expression simple

$$(24) \quad P_n^m(z) = \frac{z^m (z^2 - 1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1 - m)} F\left(\frac{n - m + 1}{2}, \frac{-n - m}{2}, 1 - m; 1 - z^2\right) \\ (\mathcal{R}(z) > 0)$$

(15) permet ainsi d'exprimer  $Q_n^m(z)$  à l'aide de deux fonctions hypergéométriques d'argument  $1 - z^2$ , avec  $\mathcal{R}(z) > 0$ . D'autre part, (20) transforme (24) en

$$(25) \quad P_n^m(z) = \frac{z^m \sin \frac{m+n}{2} \pi}{\pi \cos n \pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)} \\ \times \left[ \sin\left(\frac{n-m}{2} \pi\right) (z^2 - 1)^{\frac{n}{2}} \right. \\ \times B\left(\frac{m-n}{2}, \frac{-m-n}{2}, -n + \frac{1}{2}; \frac{1}{1-z^2}\right) \\ \left. + \cos\left(\frac{n+m}{2} \pi\right) (z^2 - 1)^{\frac{-n-1}{2}} \right. \\ \left. \times B\left(\frac{n-m+1}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}; \frac{1}{1-z^2}\right) \right],$$

d'où l'on déduit, à l'aide de (15),

$$(26) \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n \pi} \frac{\Gamma(m+n+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} (z^2 - 1)^{-\frac{n+1}{2}} \\ \times F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}; \frac{1}{1-z^2}\right);$$

ces deux expressions sont valables dans tout le domaine d'uniformité des deux fonctions.

(18) transforme (3) en une expression de  $P_n^{(m)}(z)$  au voisinage de  $z = -1$ ; en transformant l'une des deux fonctions hypergéométriques à l'aide de (9), il vient

$$(27) \quad P_n^m(z) = \frac{\Gamma(-m) \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(n-m+1) \Gamma(-n-m)} F\left(-n, n+1, 1+m; \frac{z+1}{2}\right) \\ + \frac{\Gamma(m) \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(-n) \Gamma(n+1)} e^{-m\pi i(saz)} F\left(-n, n+1, 1-m; \frac{z+1}{2}\right),$$

valable pour  $m$  non entier et se réduisant à son premier terme pour  $n$  entier. Un passage à la limite permet d'en déduire une expression de  $P_n$  [19,  $\alpha$ , p. 7]. A partir de (3) et (27), (15) fournit les développements de  $Q_n^m$  aux voisinages des mêmes points critiques  $z = \pm 1$ ; par exemple, on a

$$Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} \left[ \Gamma(m) \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{m}{2}} F \left( -n, n+1, 1-m; \frac{1-z}{2} \right) + \frac{\Gamma(-m)\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{m}{2}} \times F \left( -n, n+1, 1+m; \frac{1-z}{2} \right) \right],$$

qui a encore une vraie valeur pour  $m$  entier [20,  $h$ , p. 205].

## 20. Définitions sur la coupure $z \leq 1$ . — Soit

$$-1 < \mu < 1 \quad \text{et} \quad z = \mu + \varepsilon oi \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

(3) donne

$$P_n^m(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} e^{-\varepsilon\pi i} \right)^{\frac{m}{2}} F \left( -n, n+1, 1-m; \frac{1-\mu}{2} \right),$$

et suggère d'adopter, sur cette coupure, la définition

$$(28) \quad P_n^m(\mu) = e^{\varepsilon \frac{m\pi i}{2}} P_n^m(\mu + \varepsilon oi) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^{\frac{m}{2}} F \left( -n, n+1, 1-m; \frac{1-\mu}{2} \right),$$

qui coïncide, pour  $m$  entier, avec la fonction de Ferrers. De même, (12) montre que

$$(29) \quad e^{-\frac{m\pi i}{2}} Q_n^m(\mu + oi) - e^{\frac{m\pi i}{2}} Q_n^m(\mu - oi) = -\pi i \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} P_n^m(\mu),$$

et conduit d'autre part, si l'on veut conserver la relation remarquable (13), à poser

$$(30) \quad Q_n^m(\mu) = \frac{1}{2 \cos m\pi} \left[ e^{-\frac{m\pi i}{2}} Q_n^m(\mu + oi) + e^{\frac{m\pi i}{2}} Q_n^m(\mu - oi) \right];$$

dans la définition de Hobson [20,  $\alpha$ ],  $e^{m\pi i}$  remplace  $\cos m\pi$ . (29) et (30) équivalent à

$$(31) \quad e^{-\frac{\varepsilon m \pi i}{2}} Q_n^m(\mu + \varepsilon oi) = Q_n^m(\mu) \cos m\pi - \varepsilon \pi i \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} P_n^m(\mu).$$

On voit tout de suite que (8), (14) et (15) sont remplacés ici par

$$(32) \quad Q_n^m(-\mu) = -\cos(m+n)\pi Q_n^m(\mu) - \frac{\pi \sin^2(m+n)\pi}{2 \sin n\pi \cos m\pi} P_n^m(\mu),$$

$$(33) \quad P_n^m(-\mu) = \cos(m+n)\pi P_n^m(\mu) - \frac{2}{\pi} \sin n\pi \cos m\pi Q_n^m(\mu),$$

$$(34) \quad P_n^m(\mu) - \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{1}{\cos m\pi} P_n^{-m}(\mu) = \frac{2 \sin n\pi \sin m\pi}{\pi \sin(m+n)\pi} Q_n^m(\mu).$$

Sur la coupure  $z = x < -1$ , (7) suggère la définition

$$(35) \quad \begin{aligned} Q_n^m(x) &= -e^{\varepsilon n \pi i} Q_n^m(x + \varepsilon oi) \\ &= -\frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{2^{m-1}(x^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(-x)^{m+n+1}} \\ &\quad \times B\left(\frac{m+n+1}{2}, \frac{m+n}{2} + 1, n + \frac{3}{2}; x^{-2}\right), \end{aligned}$$

avec  $\arg(-x) = \arg(x^2 - 1) = 0$ . Aucune définition de  $P_n^m(x)$  ne paraît s'imposer; cependant

$$(36) \quad P_n^m(x) = \frac{1}{2i \sin n\pi} [P_n^m(x + oi) - P_n^m(x - oi)]$$

présente l'avantage d'être liée à (35) par les relations (13) et (15).

**21. Expressions en fonction de  $\eta = z + \sqrt{z^2 - 1}$ .** — Des développements de cette nature ont été formés au paragraphe 3. Le changement de variables [20,  $\alpha$ ]  $\xi \eta^2 = 1$ ,  $u^{(m)} = \xi^{\frac{m+n+1}{2}} \omega$  transforme (14, I) en l'équation différentielle de la fonction

$$F\left(m+n+1, m + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}; \xi\right);$$

à l'infini,  $\eta$  est équivalente à  $2z$ , et la comparaison des parties principales de cette fonction hypergéométrique et de (7) montre que

$$(37) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} 2^m \eta^{-m-n-1} \\ \times F\left(m+n+1, m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \eta^{-2}\right);$$

la série converge dans le plan de  $z$  coupé, car  $|\eta| > 1$ . (10) transforme ce développement en

$$(38) \quad Q_n^m(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} 2^{-m} \eta^{m-n-1} (z^2-1)^{-\frac{m}{2}} \\ \times F\left(n-m+1, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \eta^{-2}\right).$$

(13) fournit  $P_n^m(z)$  et (38) donne ainsi, compte tenu de (18), avec  $\left|\arg \frac{1}{\eta}\right| < \pi$ , c'est-à-dire  $\mathcal{R}(z) > 0$ .

$$(39) \quad P_n^m(z) = \frac{2^m \eta^{-m-n-1}}{\Gamma(1-m)} (z^2-1)^{-\frac{m}{2}} \\ \times F\left(n-m+1, -m+\frac{1}{2}, 1-2n; 1-\frac{1}{\eta^2}\right).$$

Par exemple, si  $z = \cos\theta + \varepsilon 0i$  ( $0 < \theta < \pi$ ), on a  $\eta = e^{\varepsilon i\theta}$ , et (37) converge sur son cercle de convergence  $|\eta| = 1$ , sauf pour  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , pourvu que  $\mathcal{R}(n) > \frac{1}{2}$ ; on obtient ainsi le développement de  $\sin^{-m}\theta Q_n^m(\cos\theta)$  en série de Fourier.

L'équation différentielle en  $\xi$ ,  $\omega$  est également satisfaite par l'intégrale de  $f \equiv t^{m+n} (1-t)^{-m-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{t}{\eta^2}\right)^{-m-\frac{1}{2}}$ , prise le long d'un contour d'uniformité de  $f$ . Par exemple, avec le quadruple lacet

$$(t_0; 1+, 0+, 1-, 0-)$$

d'origine  $t_0$  comprise entre 0 et 1, l'intégrale de  $f dt$  est développable

en série entière de  $\eta^{-2}$  si  $|\eta^2| > 1$ ; avec les déterminations

$$\arg t_0 = \arg(1 - t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \left| \arg \left( 1 - \frac{t_0}{\eta^2} \right) \right| < \pi,$$

la comparaison avec (37) pour  $z = \infty$  donne

$$(40) \quad Q_n^{(m)}(z) = -e^{-n\pi i} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\pi i \sin n\pi} 2^m \eta^{-m-n-1} \\ \times \int_{t_0}^{(1+, 0+ \mid 1-, 0-)} t^{m+n} (1-t)^{-m-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t}{\eta^2}\right)^{-m-\frac{1}{2}} dt$$

Posons  $t = \eta h$ ; compte tenu de  $\eta + \frac{1}{\eta} = 2z$ , on a encore

$$(41) \quad Q_n^{(m)}(z) = -e^{-n\pi i} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\pi i \sin n\pi} 2^m \\ \times \int_{h_0}^{(\frac{1}{\eta}+, 0+ \mid \frac{1}{\eta}-, 0-)} h^{m+n} (1 - 2zh + h^2)^{-m-\frac{1}{2}} dh,$$

ou  $h_0$  est sur le segment  $\left(0, \frac{1}{\eta}\right)$ , avec

$$\arg h_0 = \arg \frac{1}{\eta}, \quad \text{et} \quad \arg(1 - 2zh + h^2) \sim 0$$

au voisinage de  $h = 0$ . En particulier, si  $\mathcal{R}(m+n+1) > 0$  et  $\mathcal{R}\left(m - \frac{1}{2}\right) < 0$ , le contour est réductible au segment  $\left(0, \frac{1}{\eta}\right)$ , d'où

$$(41') \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \\ \times \int_0^{\frac{1}{\eta}} h^{m+n} (1 - 2zh + h^2)^{-m-\frac{1}{2}} dh \\ \left(\mathcal{R}(-n-1) < \mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}\right).$$

Un second contour d'uniformité de  $f$  est le huit  $(t_0; 1+, \eta^2-)$ ; en supposant  $|1 - \eta^{-2}| < 1$ , effectuons le changement  $t = \eta^2 + (1 - \eta^2)t'$ ; développons l'intégrale obtenue et comparons à (39) au voisinage

de  $\eta^2 = 1$ ; avec les mêmes déterminations que pour (40), on voit que

$$P_n^{(m)}(z) = - \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2^m \eta^{-m-n-1}}{2\pi i} \\ \times \int_{t_0}^{(1+, \eta^2-)} t^{m+n} (1-t)^{-m-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t}{\eta^2}\right)^{-m-\frac{1}{2}} dt \\ \left(\mathcal{R}(z) > 0, \quad |\arg \eta| < \frac{\pi}{2}\right),$$

ou encore, en posant  $t = \eta h$ ,

$$(42) \quad P_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2^m}{2\pi i} \int_{h_0}^{(\eta+, \frac{1}{\eta}-)} h^{m+n} (1 - 2zh + h^2)^{-m-\frac{1}{2}} dh,$$

valable dans le plan coupé. Pour  $m$  entier, on peut substituer le contour  $(h_0; \eta +, \frac{1}{\eta} +)$ ; en particulier,

$$(43) \quad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+x}^{(\eta+, \frac{1}{\eta}+)} \frac{h^n dh}{\sqrt{1 - 2zh + h^2}}.$$

Les contours des intégrales dans (5) et (42) coïncident par la correspondance  $h = z - t\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z^2 - 1}(z' - t)$ , où  $z' = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}$ .

A la coupure  $(-1, 1)$  du plan de l'une des variables  $z, z'$ , correspond l'axe imaginaire pur du plan de l'autre variable. Supposons donc  $\mathcal{R}(z') > 0$  et  $\mathcal{R}(z) > 0$ . L'intégrale (42) ne diffère de l'intégrale (5) de  $Q_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(z')$  que par le facteur  $(z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$  et un facteur

constant; celui-ci se calcule en comparant les parties principales fournies par (3) et (7) aux voisinages de  $z = 1, z' = \infty$ , et l'on a l'identité remarquable de Whipple [47] :

$$(44) \quad Q_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(m+n+1) \cos m\pi} P_n^m(z) \quad [\mathcal{R}(z) > 0],$$

qui ramène curieusement l'une à l'autre les fonctions des deux espèces.

22. Soit  $|\eta^2 - 1| > 1$ ; l'intégrale (40), où l'on fait le changement  $t = 1 - t'$ , est développable en série entière de  $\frac{1}{\eta^2 - 1}$ , ce qui donne [20, a]

$$(45) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{2^m \eta^{m-n}}{(\eta^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \\ \times F\left(m+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-\eta^2}\right).$$

Cette fonction hypergéométrique et celle relative à  $Q_{-n-1}^{(m)}$  vérifient, en vertu de (9) et (18), l'identité

$$F\left(m+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \frac{-\eta^2}{1-\eta^2}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n-m+1)} F\left(m+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}, -n+\frac{1}{2}; \frac{1}{1-\eta^2}\right) \\ - \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)} (-\eta^2)^{-n-\frac{1}{2}} \\ \times F\left(m+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-\eta^2}\right),$$

avec  $|\arg(-\eta^2)| < \pi$ , et l'élimination de l'une d'elles entre cette identité et l'expression de  $P_n^{(m)}(z)$ , obtenue grâce à (13) et (45), donne

$$(46) \quad P_n^{(m)}(z) = \frac{2^m \Gamma(m+n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \\ \times \left[ e^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi i (s\arg\eta^2)} \frac{\eta^{m-n}}{(\eta^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \right. \\ \times F\left(m+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \frac{1}{1-\eta^2}\right) \\ \left. + \frac{\eta^{m+n+1}}{(\eta^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} F\left(m+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; \frac{-\eta^2}{1-\eta^2}\right) \right] \\ (|\arg\eta^2| < \pi),$$

où les deux fonctions hypergéométriques ont les mêmes coefficients.

En particulier, si  $z = \mu + \varepsilon \circ i$ , (45) se décompose, grâce à (31), en les deux développements trigonométriques remarquables [20,  $\alpha$ ]

$$(47) \quad Q_n^m(\cos \theta) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi \cos m\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(m+n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-4m^2)(3^2-4m^2)\dots(\overline{2r-1}^2-4m^2)}{(2r)!!(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r+1)} \\ \times \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}+r\right)\theta + \left(m+\frac{1}{2}-r\right)\frac{\pi}{2}\right]}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},$$

$$(48) \quad P_n^m(\cos \theta) = \frac{2\Gamma(m+n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-4m^2)(3^2-4m^2)\dots(\overline{2r-1}^2-4m^2)}{(2r)!!(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r+1)} \\ \times \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+r\right)\theta + \left(m+\frac{1}{2}-r\right)\frac{\pi}{2}\right]}{(2\sin\theta)^{r+\frac{1}{2}}},$$

convergens pour  $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$ .

**23. Représentation par des intégrales définies.** — Hobson [20,  $\alpha$ ,  $h$ ], a établi beaucoup d'autres expressions de  $P_n^m$  et  $Q_n^m$ , généralisant parfois des expressions antérieures des fonctions ou polynomes  $P_n$ . Par exemple, le changement  $t = \cos \varphi$  transforme (5') en

$$Q_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(-n)2^{-n-1}}{\Gamma(-m-n)} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n+1}\varphi}{(z - \cos \varphi)^{m+n+1}} d\varphi \quad [\mathcal{R}(n) > -1];$$

grâce à (44), cela équivaut à

$$(49) \quad P_n^m(z) = \frac{2^m(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^{m+n} \sin^{-2m} \varphi d\varphi \\ \left(\mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}, \mathcal{R}(z) > 0\right),$$

où la détermination de  $\sqrt{z^2 - 1}$  est évidemment quelconque dans l'intégrandum. Changeons  $m$  en  $-m$  et portons l'expression obtenue dans (15); il vient, pour  $\mathcal{R}(m) > -\frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{R}(z) > 0$ ,

$$(50) \quad \begin{aligned} P_n^m(z) &= \frac{2 \sin m \pi \sin n \pi}{\pi \sin(m+n)\pi} Q_n^m(z) \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad \times \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^{n-m} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi; \end{aligned}$$

l'intégrale est d'ailleurs invariante quand on change  $n$  en  $-n-1$ , comme le montre (49). Changeons  $z$  en  $-z$  dans (50); grâce à (8) et (14), il vient, pour  $\mathcal{R}(z) < 0$ ,

$$(51) \quad \begin{aligned} P_n^m(z) &= \frac{2 e^{(n-m)\pi i} \sin^2 n \pi}{\pi \sin(m+n)\pi} Q_n^m(z) \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad \times \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^{n-m} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi; \end{aligned}$$

l'intégrale peut être remplacée par sa transformée par le changement de  $n$  en  $-n-1$ , multipliée par  $-e^{2n\pi i} (saz)$ . On passe aisément de ces expressions aux formules

$$(52) \quad \begin{aligned} P_n^m(\cos \theta) &= \frac{2 \sin m \pi \sin n \pi}{\pi \sin(m+n)\pi} Q_n^m(\cos \theta) \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{\sin^m \theta}{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\cos m \pi} \\ &\quad \times \int_0^\pi (\cos \theta \pm i \sin \theta \cos \varphi)^{n-m} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

$$(53) \quad \begin{aligned} \cos n \pi P_n^m(\cos \theta) &= \frac{2 \cos m \pi \sin^2 n \pi}{\pi \sin(m+n)\pi} Q_n^m(\cos \theta) \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{\sin^m \theta}{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad \times \int_0^\pi (|\cos \theta| \pm i \sin \theta \cos \varphi)^{n-m} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right), \end{aligned}$$

valables pour  $\mathcal{R}(m) > -\frac{1}{2}$ . Ces deux intégrales sont invariantes quand on change  $n$  en  $-n-1$ .

Le changement  $\frac{1}{h} = z + \sqrt{z^2-1} \operatorname{ch} \psi$  transforme (41') en une expression de  $Q_n^m$  semblable à (49). Grâce à (10), il vient encore, sous une forme plus simple [17, a; 20, a] :

$$(54) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2^m \sin n\pi} \frac{\Gamma(n+m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \\ \times \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{2m}\psi}{(z + \sqrt{z^2-1} \operatorname{ch} \psi)^{m+n+1}} d\psi \\ \left( \mathcal{R}(n+1) > \mathcal{R}(m) > -\frac{1}{2} \right).$$

En posant  $h = z - \sqrt{z^2-1} \operatorname{ch} \psi$ , (41') et (10) donnent de même [20, a]

$$(55) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2^m \sin n\pi} \frac{\Gamma(n+m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \\ \times \int_0^\omega (z - \sqrt{z^2-1} \operatorname{ch} \psi)^{n-m} \operatorname{sh}^{2m}\psi d\psi \\ \left( \mathcal{R}(n+1) > \mathcal{R}(m) > -\frac{1}{2} \right),$$

où  $\operatorname{ch} \omega = \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}$  et  $|\arg \operatorname{sh} \psi| < \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire  $\omega = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1}$ .

Lorsque  $\mathcal{R}(n) < -\mathcal{R}(m)$ , Hobson [20, a] prend l'intégrale (2) le long du double demi-cercle fermé (1) ( $z, -z\infty, z\infty, z, z\infty, -z\infty, z$ ), en prenant soin de changer la détermination en  $z$  comme l'exige le quadruple lacet primitif équivalent; l'intégrale est nulle sur le demi-cercle infini parcouru deux fois, de sorte que

$$P_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m-n)} \frac{1}{2\pi i} \left[ e^{-(m+2n)\pi i} \int_z^{-z\infty} f dt - e^{-m\pi i} \int_z^{z\infty} f dt \right],$$

où  $f$  désigne l'intégrandum de (2). Déformons de même le contour C'

(1)  $z\infty$  désigne le point à l'infini de même argument que  $z$ .

de (5) en un contour formé de la droite  $(-\infty, z\infty)$  et des deux demi-cercles infinis qui joignent ses extrémités; il vient

$$Q_n^{(m)}(z) = \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m-n)} \frac{1}{2i \sin m\pi} \\ \times \left[ e^{-(m+2n)\pi i} \cos n\pi \int_z^{-z\infty} f dt - e^{-n\pi i} \cos m\pi \int_z^{z\infty} f dt \right].$$

Par élimination de la première intégrale dans ces deux expressions, il reste une seule intégrale définie pour représenter  $Q_{-n-1}^{(m)}(z)$ , ou enfin, en changeant  $n$  en  $-n-1$ ,

$$(56) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2 \sin n\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} \\ \times \int_z^{z\infty} \left( \frac{t^2-1}{2} \right)^{-n-1} (t-z)^{n-m} dt \\ [\mathcal{R}(n+1) > |\mathcal{R}(m)|].$$

On peut encore remplacer  $(z, z\infty)$  par la demi-droite

$$[z, (\sqrt{z^2-1}-z)\infty],$$

dont le prolongement traverse également le segment  $(-1, 1)$ ; en posant  $t = z + \sqrt{z^2-1} e^\psi$ , (56) se transforme ainsi en [17,  $a$ ; 20,  $a$ ]

$$(57) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} m\psi}{(z + \sqrt{z^2-1} \operatorname{ch} \psi)^{n+1}} d\psi \\ [\mathcal{R}(n+1) > |\mathcal{R}(m)|].$$

(44) donne ensuite

$$(58) \quad P_n^m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) (z^2-1)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(n-m+1) \Gamma(-n-m)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{(z + \operatorname{ch} \psi)^{\frac{1}{2}-m}} d\psi \\ [\mathcal{R}(m-1) < \mathcal{R}(n) < \mathcal{R}(-m)],$$

valable dans le plan coupé. En particulier, si  $m$  est entier, il vient encore, grâce à (15) :

$$(59) \quad P_n^m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi}{(z + \operatorname{ch} \psi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \\ [-m-1 < \mathcal{R}(n) < m \text{ entier}].$$

Signalons encore la transformation de (5') par  $t = z - \sqrt{z^2 - 1} e^\psi$  [20, a]:

$$(60) \quad Q_n^m(z) \approx \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m-n)} \int_0^\omega (z - \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^n \operatorname{ch} m \psi d\psi$$

$$[\mathcal{R}(n) > -1],$$

où  $\omega$  a la même signification que dans (55).

24. Lorsque  $\mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}$ , substituons au contour de (42) un arc de courbe joignant  $\frac{1}{\eta}$  à  $\eta$  et ne traversant pas l'axe  $(-\infty, 0)$ ; il vient

$$(61) \quad P_n^{(m)}(z) = e^{-(m+\frac{1}{2})\pi i} \frac{2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)}$$

$$\times \int_{\frac{1}{\eta}}^{\eta} h^{m+n} (1 - 2zh + h^2)^{-m-\frac{1}{2}} dh \quad \left[ \mathcal{R}(m) < \frac{1}{2} \right],$$

avec la détermination  $\arg(1 - 2zh + h^2) = 2 \arg \sqrt{z^2 - 1} - \pi$  pour  $h$  voisin de  $\frac{1}{\eta}$ , sur le segment rectiligne  $\left(\frac{1}{\eta}, \eta\right)$ . En particulier, si  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $\eta = e^{i\theta}$ , prenons l'intégrale sur l'arc de cercle  $h = e^{i\varphi}$  ( $-\theta \leq \varphi \leq \theta$ ); on a  $-\theta \leq \arg(1 - 2zh + h^2) \leq \theta$ , et, grâce à (28), [20, a]

$$(62) \quad P_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^m \theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\varphi$$

$$\left( \mathcal{R}(m) < \frac{1}{2} \right).$$

Parmi les expressions que permet d'en déduire (34), citons

$$(63) \quad P_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \frac{(-\sin \theta)^{-m}}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{\frac{1}{2}-m}} d\varphi$$

$$(m \text{ entier } \geq 0).$$

A l'aide de (33), le changement de  $\theta$  et  $\varphi$  en  $\pi - \theta$ ,  $\pi - \varphi$  trans-

forme (62) en

$$(64) \quad \cos(m+n)\pi P_n^m(\cos\theta) - \frac{2}{\pi} \sin n\pi \cos m\pi Q_n^m(\cos\theta) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^m\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \int_0^\pi \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi-\varphi)}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{m+\frac{1}{2}}} d\varphi \quad \left(\mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}\right),$$

qu'on peut également transformer d'après (34). Pour  $m=0$ , (62) se réduit à la première expression de Mehler [30]

$$(65) \quad P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} d\varphi,$$

èt pour  $m=0$ ,  $n$  entier, (64) donne la deuxième expression de Mehler [30]

$$(66) \quad P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} d\varphi \quad (n \text{ entier}).$$

Supposons  $\mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}$  et  $\mathcal{R}(m+n+1) > 0$ . Nous pouvons prendre l'intégrale (61), où  $-1 < z < 1$ , le long du contour  $\left(\frac{1}{\eta}, -1, 0+, -1, \eta\right)$  formé par deux arcs du cercle

$$h = e^{i\varphi} \quad (-\theta \geq \varphi \geq -\pi \text{ et } \theta \leq \varphi \leq \pi)$$

et le lacet rectiligne  $(-1; 0+)$  sur lequel on pose  $|h| = e^{-\psi}$ ; il vient alors

$$(67) \quad P_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^m\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \\ \times \left[ \int_0^\pi \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi + \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{m+\frac{1}{2}}} d\varphi \right. \\ \left. - \sin(m+n)\pi \int_0^\infty \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\cos\theta + \operatorname{ch}\psi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right];$$

si  $\mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{R}(m-n) > 0$ , la substitution, dans le contour précédent, du lacet  $(-1; -\infty-)$  au lacet  $(-1; 0+)$ , équivaut à changer  $n$  en  $-n-1$  dans (67).

Prenons l'intégrale (41'), où  $z = \cos \theta + oi$ , sur le chemin  $(0, 1, \frac{1}{\eta})$  formé par le rayon  $h = e^{-\psi} (\infty > \psi \geq 0)$  et l'arc de cercle  $h = e^{-i\varphi} (0 \leq \varphi \leq \theta)$ . Grâce à (31) et (62), on a

$$(68) \quad Q_n^m(\cos \theta) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \sin^m \theta \times \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \psi - \cos \theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi - \int_0^\theta \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\varphi \right],$$

valable pour  $\mathcal{R}(-n-1) < \mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}$ . En particulier,

$$(69) \quad Q_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\psi}}{\sqrt{\operatorname{ch} \psi - \cos \theta}} d\psi - \int_0^\theta \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi \right] \quad [-1 < \mathcal{R}(n) < 0].$$

Admettons, en outre, que  $\mathcal{R}(m-n) > 0$ , et prenons l'intégrale (41'), où  $z = \cos \theta + \varepsilon oi$ , sur le contour

$$\left(0, -\infty, -\varepsilon i\infty, \infty, 1, \frac{1}{\eta}\right)$$

formé par le chemin  $h = e^{\psi - \varepsilon i\pi} (-\infty < \psi < \infty)$ , un demi-cercle infini, le chemin rectiligne  $h = e^{\psi} (\infty > \psi \geq 0)$  et l'arc de cercle  $h = e^{-i\varphi} (0 \leq \varphi \leq \theta)$ . Compte tenu de (30), on a

$$(70) \quad Q_n^m(\cos \theta) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \sin^m \theta \times \left[ \cos 2m\pi \int_0^\infty \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \psi - \cos \theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi - \cos(m+n)\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \psi + \cos \theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi - \int_0^\theta \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi + 2m\pi\right]}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{m+\frac{1}{2}}} d\varphi \right],$$

valable pour  $|\mathcal{R}(n + \frac{1}{2})| < \mathcal{R}(m + \frac{1}{2}) < 1$ . Pour  $m = 0$ , l'addition de (69) et (70) donne la formule remarquable

$$(71) \quad Q_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{\operatorname{ch}\psi - \cos \theta}} d\psi - \cos n\pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{\operatorname{ch}\psi + \cos \theta}} d\psi \right] \quad [-1 < \mathcal{R}(n) < 0],$$

très importante pour les valeurs  $n = -\frac{1}{2} + ip$ , qui correspondent aux fonctions harmoniques coniques.

25. Pour  $z = \operatorname{ch} \chi$ ,  $\chi > 0$ , on a  $\eta = e^\chi$ , et l'on peut prendre l'intégrale (61) sur le segment de droite  $h = e^\psi$  ( $-\chi \leq \psi \leq \chi$ ), donc

$$(72) \quad P_n^m(\operatorname{ch} \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \int_0^\chi \frac{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{(\operatorname{ch} \chi - \operatorname{ch} \psi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi$$

$$\left(\mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}\right).$$

Si l'on a, en outre,  $\mathcal{R}(m + n + 1) > 0$ ,  $\mathcal{R}(m - n) > 0$ , le chemin  $\left(\frac{1}{\eta}, 0i, -\infty, i\infty, \infty, \eta\right)$ , où l'on pose successivement

$$h = e^{-\psi} (\chi \leq \psi < \infty), \quad h = e^{\pi i} e^\psi (-\infty < \psi < \infty), \quad h = e^\psi (\infty > \psi \geq \chi),$$

donne

$$(73) \quad P_n^m(\operatorname{ch} \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)}$$

$$\times \left[ \int_0^\infty \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\pi i} \operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{(\operatorname{ch} \psi + \operatorname{ch} \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi - \int_\chi^\infty \frac{\operatorname{ch}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi + \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi i\right]}{(\operatorname{ch} \psi - \operatorname{ch} \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right].$$

Changeons  $n \text{ en } n - 1$ ; des combinaisons évidentes avec (73) donnent

$$(74) \quad P_n^m(\text{ch } \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \left[ \sin m \pi \int_{\chi}^{\infty} \frac{\text{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{(\text{ch } \psi - \text{ch } \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi - \sin n \pi \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{(\text{ch } \psi + \text{ch } \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right],$$

$$(75) \quad P_n^m(\text{ch } \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \times \int_{\chi}^{\infty} \frac{\sin m \pi \text{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi - \cos m \pi \text{tang } n \pi \text{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{(\text{ch } \psi - \text{ch } \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi,$$

valables pour  $\left| \Re\left(n + \frac{1}{2}\right) \right| < \Re\left(m + \frac{1}{2}\right) < 1$ . En particulier,

$$(76) \quad P_n(\text{ch } \chi) = - \frac{\sqrt{2} \sin n \pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{\text{ch } \psi + \text{ch } \chi}} d\psi \\ = - \frac{\sqrt{2} \text{tang } n \pi}{\pi} \int_{\chi}^{\infty} \frac{\text{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{\text{ch } \psi - \text{ch } \chi}} d\psi \quad [-1 < \Re(n) < 0].$$

Pour les mêmes valeurs de  $z > 1$ , (41'), où  $h = e^{-\psi}$  ( $\infty > \psi \geq \chi$ ) donne

$$(77) \quad Q_n^m(\text{ch } \chi) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n \pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \int_{\chi}^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\text{ch } \psi - \text{ch } \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \\ \left( \Re(-n-1) < \Re(m) < \frac{1}{2} \right).$$

La condition supplémentaire  $\Re(m-n) > 0$  permet de prendre l'intégrale (41') sur le contour  $(0, -\infty, \varepsilon i \infty, \infty, \eta + \varepsilon i, \frac{1}{\eta})$ , et des nota-

tions semblables à celles de (73) donnent les deux expressions ( $\varepsilon = \pm 1$ )

$$(78) \quad Q_n^m(\operatorname{ch} \chi) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \\ \times \left[ \int_{\chi}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon 2m\pi i} e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \psi - \operatorname{ch} \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right. \\ \left. - \int_{-\chi}^{\chi} \frac{e^{\varepsilon(m+\frac{1}{2})\pi i} e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \chi - \operatorname{ch} \psi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon(m+n)\pi i} e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \psi + \operatorname{ch} \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right],$$

entre lesquelles on peut éliminer l'une des trois intégrales. Par exemple,

$$(79) \quad Q_n^m(\operatorname{ch} \chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) \sin n\pi} \\ \times \left[ \cos n\pi \int_{-\chi}^{\chi} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \chi - \operatorname{ch} \psi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right. \\ \left. + \sin(n-m)\pi \int_{\chi}^{\infty} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\psi}}{(\operatorname{ch} \psi - \operatorname{ch} \chi)^{m+\frac{1}{2}}} d\psi \right],$$

valable pour  $\left| \mathcal{R}\left(n + \frac{1}{2}\right) \right| < \mathcal{R}\left(m + \frac{1}{2}\right) < 1$ .

Lorsque  $n + \frac{1}{2}$  est un nombre entier, l'uniformité de l'intégrandum autour du couple  $0, \frac{1}{\eta}$  permet de prendre l'intégrale (41) sur un contour simple entourant ce couple, mais non  $\eta$ . Pour  $z = \operatorname{ch} \chi$ , ce contour peut être le cercle trigonométrique  $h = e^{i\varphi}$ , d'où résulte [20, a]

$$(80) \quad Q_n^m(\operatorname{ch} \chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh}^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \int_0^{\pi} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{(\operatorname{ch} \chi - \cos \varphi)^{m+\frac{1}{2}}} d\varphi \\ \left(n + \frac{1}{2} \text{ entier}\right).$$

Soit, en outre,  $n < \mathcal{R}(m) < \frac{1}{2}$ ; prenons (41) sur le contour  $(\infty, \infty -, \infty, \eta -, \infty)$  formé par le cercle infini et le lacet d'origine  $\infty$  et de sommet  $\eta$ ; on trouve ainsi ce que devient (79) lorsque  $n - \frac{1}{2}$  est entier, mais sans la restriction qui permettait de passer à l'origine, c'est-à-dire

$$(81) \quad Q_n^m(\text{ch } \chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos m \pi \text{ sh }^m \chi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \int_{\chi}^{\infty} \frac{e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}}{(\text{ch } \psi - \text{ch } \chi)^{m + \frac{1}{2}}} d\psi$$

$$\left[0 > \mathcal{R}\left(m - \frac{1}{2}\right) > n - \frac{1}{2} \text{ entier}\right].$$

**26. Propriétés particulières aux valeurs entières de  $m$ .** — Dans ce cas, le contour de l'intégrale (2) est remplaçable par le contour simple  $C(z +, 1 +)$ , d'où

$$(82) \quad P_n^m(z) = \frac{\Gamma(m + n + 1)}{\Gamma(n + 1)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t^2 - 1}{2t - 2z}\right)^n \frac{dt}{(t - z)^{m+1}}.$$

Avec les notations du paragraphe 7,

$$\frac{t - z}{-1 - z} = R(t, -1, z, \infty) = R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2),$$

donc la transformation homographique qui fait passer de (1, II) à (2, II), donne ici, avec un choix convenable de  $\arg \frac{Q}{P}$ ,

$$(83) \quad \frac{\Gamma(-m - n)}{\Gamma(-n)} P_n^m(z) = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^n \frac{dR(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)}{R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^{m+1}};$$

le premier membre est invariant quand on change  $m$  en  $-m$ . Ainsi, apparaît l'intérêt des fonctions [24, a]

$$(84) \quad J_n^m(z) = \frac{\Gamma(-m - n)}{\Gamma(-n)} \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^{\frac{m}{2}} P_n^m(z),$$

qu'on peut définir comme les coefficients du développement de Laurent

$$(85) \quad \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n^m(z) R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^m \quad [\mathcal{R}(z) > 0],$$

en fonction de l'invariant essentiel  $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ . L'existence de (85) suppose celle d'une couronne limitée par deux cercles conjugués par rapport à  $\tau_1, \tau_2$  et séparant le couple  $\sigma_1, \tau_1$  du couple  $\sigma_2, \tau_2$ . Dans les conditions de (82), ce sont deux cercles de centre  $\tau_1 = z$ , d'où la condition de validité  $|z - 1| < |z + 1|$  qui accompagne (85).

Dans les conditions du paragraphe 9, (83) conduit au développement [24,  $\alpha$ ]

$$(86) \quad P_n^m(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \left( \frac{z-z_0}{1-z_0} \right)^n \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{n}{m+k} \\ \times F \left( -k, n+1, n-m+k+1; \frac{1+z_0}{2} \right) \left( \frac{z-1}{z-z_0} \right)^k,$$

valable pour  $\left| \frac{z-1}{z-z_0} \right| < 1$  et  $\left| \frac{2}{1+z_0} \right|$ . Les formes correspondant à  $z_0 = -1$  et  $z_0 = \infty$  ont été obtenues aux paragraphes 17 et 19.

Une forme particulièrement intéressante de (83) s'obtient avec  $\tau_1 = 0, \tau_2 = \infty, \sigma_1 = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} e^{\zeta}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} e^{\zeta}$ ,  $\zeta$  désignant une constante quelconque. On peut prendre pour  $\Gamma$  le cercle trigonométrique, pourvu que  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < e^{-2\mathcal{R}(\zeta)} < \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$ , et (83) prend la forme Laplacienne [20,  $\alpha$ ]

$$(87) \quad \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} P_n^m(z) = \frac{e^{m\zeta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z + \sqrt{z^2-1} \cos(\varphi + i\zeta)]^n e^{-im\varphi} d\varphi \\ [\mathcal{R}(z) > 0],$$

avec  $|\mathcal{R}(\zeta)| < \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$ . En changeant  $m$  en  $-m$ , et combinant les deux égalités, on en déduit [17,  $\alpha$ ; 20,  $\alpha$ ]

$$(88) \quad \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} P_n^m(z) \frac{\cos(im\zeta)}{\sin(im\zeta)} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z + \sqrt{z^2-1} \cos(\varphi - i\zeta)]^n \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} d\varphi.$$

Par exemple,  $\zeta = 0$  donne [17,  $\alpha$ ]

$$(88') \quad P_n^m(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos \varphi)^n \cos m\varphi d\varphi \\ [\mathcal{R}(z) > 0].$$

Le développement (85) correspondant est

$$\begin{aligned}
 (89) \quad & [z + \sqrt{z^2 - 1} \cos(\varphi + i\zeta)]^n \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} P_n^m(z) e^{im(\varphi+i\zeta)} \\
 &= P_n(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} P_n^m(z) \cos m(\varphi + i\zeta) \\
 &\quad \left\{ |\mathcal{R}(\zeta)| < \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{z+1}{z-1} \right| \right\},
 \end{aligned}$$

et fournit, avec les notations du paragraphe 4, le développement de Fourier d'une fonction harmonique de la forme  $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^n$  en fonction de la longitude  $\varphi$  [20,  $\alpha$ ]. Sa convergence est uniforme par rapport à  $\zeta$  dans tout domaine fermé satisfaisant à l'inégalité.

Lorsque  $\left| 1 - \frac{1}{z^2} \right| < 1$ , (88') est développable en série entière de  $1 - \frac{1}{z^2}$ , d'où

$$\begin{aligned}
 (90) \quad P_n^{\pm m}(z) &= \frac{\Gamma(n \pm m + 1) z^{n-m}}{\Gamma(n - m + 1) \Gamma(m + 1)} \left( \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^m \\
 &\quad \times F \left( \frac{m-n}{2}, \frac{m-n+1}{2}, m+1; 1 - \frac{1}{z^2} \right) \\
 &\quad [m, \mathcal{R}(z) > 0];
 \end{aligned}$$

en particulier, on a ainsi le développement de  $P_n^m(\cos \theta)$  ( $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ ) en série de  $\text{tang}^2 \theta$ . L'extension de (90) aux valeurs non entières de  $m$  s'obtient en transformant (7) par (18) et en utilisant (13), mais le résultat est compliqué.

27. L'expression de  $Q_n^m(z)$  analogue à (83) est, avec un choix convenable de  $\arg \frac{Q}{P}$ ,

$$\begin{aligned}
 (91) \quad Q_n^m(z) &= \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m-n)} \frac{e^{(1-n)\pi i}}{4i \sin n\pi} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{m}{2}} \\
 &\quad \times \int_{\Gamma} \left[ \frac{Q(t)}{P(t)} \right]^n \frac{dR(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)}{R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^{m+1}},
 \end{aligned}$$

extension de (5) sans restriction de  $m$  ou  $n$ . Cependant, si  $\mathcal{R}(n+1) < 0$ ;

le contour  $\Gamma'$ , qui est le même que dans (14, II), peut être remplacé par un arc  $\sigma_1 \sigma_2$  ne traversant pas la coupure  $\tau_1 \tau_2$ , et l'on a

$$(92) \quad \frac{\Gamma(-m-n)}{\Gamma(-n)} Q_n^m(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[ \frac{Q(t)}{P(t)} \right]^n \frac{dR(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)}{R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^{n+1}}$$

$$[\mathcal{R}(n) > -1];$$

le premier membre est invariant quand on change  $m$  en  $-m$ . On voit aisément que la forme de (92) correspondant aux conditions de (87) équivaut à l'expression (60).

28. Écrivons  $P(t)^{-n-1} \equiv a^{n+1} [(at+b)^2 - 1]^{-n-1}$ , et observons que  $P_n^{(n+1)}(z) = \frac{2^{n+1}}{\Gamma(-n)} (z^2 - 1)^{-n-1}$ , comme il résulte de (3); il vient donc, si  $|t| < |\tau_1|$  et  $|\tau_2|$ ,

$$P(t)^{-n-1} = \left( \frac{a}{2} \right)^{n+1} \Gamma(-n) P_n^{(n+1)}(b+at) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a^{n+p+1} \Gamma(-n)}{2^{n+1} \Gamma(p+1)} P_n^{(n+p+1)}(b) t^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n)}{2^{n+1} \Gamma(p+1)} \left( \frac{a}{c} \right)^{\frac{n+p+1}{2}} P_n^{n+p+1}(b) t^p.$$

En posant  $a = \sqrt{b^2 - 1} e^{-\nu}$ ,  $c = \sqrt{b^2 - 1} e^{\nu}$ , il vient enfin

$$(93) \quad \left[ \frac{P(t)}{2t} \right]^{-n-1} = \sum_{m-n-1 \Rightarrow 0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(m-n)} P_n^m(b) e^{-m\nu} t^m \quad (|t| < |\tau_1| \text{ et } |\tau_2|),$$

ou encore, en posant  $t = e^{\psi}$ ,  $b = z$ , de sorte que

$$\tau_1 = -\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} e^{\nu}, \quad \tau_2 = -\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} e^{\nu},$$

$$(94) \quad [z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch}(\psi - \nu)]^{-n-1} = \sum_{m-n-1 \Rightarrow 0}^{\infty} \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(m-n)} P_n^m(z) e^{m(\psi - \nu)}$$

$$\left[ \mathcal{R}(\psi - \nu) < -\frac{1}{2} \left| \operatorname{Log} \left| \frac{z+1}{z-1} \right| \right| \right].$$

En particulier, si  $\psi = i\varphi$  ( $\varphi$  réel) et  $\mathcal{R}(\nu) > \frac{1}{2} \left| \operatorname{Log} \left| \frac{z+1}{z-1} \right| \right|$ , (94) donne le développement de Fourier de  $[z + \sqrt{z^2 - 1} \cos(\varphi + i\nu)]^{-n-1}$ ,

d'où la signification de l'intégrale au second membre de (87) lorsque c'est  $m - n$  qui est entier [20, a]

$$(95) \quad \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(m-n)} P_n^m(z) = \frac{e^{m\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z + \sqrt{z^2-1} \cos(\varphi + i\nu)]^{-n-1} e^{-im\varphi} d\varphi$$

( $m - n$  entier  $> 0$ ).

Ces égalités supposent qu'on choisit convenablement l'argument de la puissance  $(-n-1)^{ie m \nu}$ , ou qu'on sous-entend un facteur convenable de la forme  $e^{2k\nu\pi i}$  ( $k$  entier).

**29. Relations de récurrence.** — Le second membre  $u_n^{(m)}$  de (41) ou (42) vérifie l'équation (14, I) ainsi que l'égalité  $\frac{du_n^{(m)}}{dz} = u_n^{(m+1)}$ . L'équation différentielle exprime donc une relation récurrente entre 3 fonctions  $u_n^{(m)}$  d'indices supérieurs consécutifs

$$(96) \quad (z^2 - 1) u_n^{(m+1)} + 2mz u_n^{(m)} - (n+m)(n-m+1) u_n^{(m-1)} = 0.$$

Dans l'intégrale de  $u_{n+1}^{(m)}$ , écrivons  $h^{m+n+1} = zh^{m+n} + h^{m+n}(h-z)$  et intégrons par parties l'intégrale relative au dernier terme; il vient tout de suite

$$(97) \quad u_{n+1}^{(m)} = z u_n^{(m)} + (m+n) u_n^{(m-1)}.$$

Changeons  $n$  en  $-n-1$  et utilisons (4) et (13); (97) s'écrit ainsi

$$(97') \quad u_{n-1}^{(m)} = z u_n^{(m)} + (m-n-1) u_n^{(m-1)},$$

et l'élimination de  $u_n^{(m-1)}$  entre ces deux égalités donne la relation récurrente [4; 14; 20, a]

$$(98) \quad (2n+1) z u_n^{(m)} = (n-m+1) u_{n+1}^{(m)} + (n+m) u_{n-1}^{(m)}$$

entre 3 fonctions  $u_n^{(m)}$  d'indices inférieurs consécutifs. Cette relation convient aussi telle quelle aux  $P_n^m$  et  $Q_n^m$ . L'élimination de  $u_n^{(m-1)}$  entre (96) et (97) ou (97') donne

$$(z^2 - 1) \frac{du_n^{(m)}}{dz} = (n-m+1) u_{n+1}^{(m)} - (n+m+1) z u_n^{(m)} \\ = (n-m) z u_n^{(m)} - (n+m) u_{n-1}^{(m)},$$

qui exprime la dérivée de  $u_n^{(m)}$  à l'aide de cette fonction et d'une fonction contiguë.

30. Orthogonalité des  $P_n^m(\mu)$ . —  $m$  étant entier, et  $-1 < \mu < 1$ , on sait que  $P_n^m(\mu)$  est la fonction de Ferrers  $(1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(\mu)$ . Multiplions (96), ou  $u \equiv P$ , par  $(1 - \mu^2)^{m-1} P_{n'}^{(m-1)}(\mu)$ , et formons

$$\begin{aligned} & (n+m)(n-m+1) \int_{-1}^1 P_n^{m-1}(\mu) P_{n'}^{m-1}(\mu) d\mu \\ &= 2m \int_{-1}^1 \mu P_n^{(m)}(\mu) P_{n'}^{(m-1)}(\mu) (1-\mu^2)^{m-1} d\mu \\ & \quad - \int_{-1}^1 P_n^{(m+1)}(\mu) P_{n'}^{(m-1)}(\mu) (1-\mu^2)^m d\mu \\ &= - \int_{-1}^1 P_{n'}^{(m-1)}(\mu) d[P_n^{(m)}(\mu) (1-\mu^2)^m]. \end{aligned}$$

$n$  et  $n'$  étant entiers, l'intégration par parties du dernier membre donne la relation de récurrence

$$(n+m)(n-m+1) \int_{-1}^1 P_n^{m-1}(\mu) P_{n'}^{m-1}(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu,$$

d'où résulte immédiatement

$$(99) \quad \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq n'), \\ \frac{2}{2n+1} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} & (n = n'). \end{cases}$$

Les suites de fonctions de Ferrers  $P_n^m(\mu)$  de même indice  $m$  sont orthogonales sur  $(-1, 1)$ .

## CHAPITRE IV.

### THEORÈMES D'ADDITION.

31. Posons, comme plus haut,  $a = \sqrt{b^2 - 1} e^{-\nu}$ ,  $c = \sqrt{b^2 - 1} e^{\nu}$ ; posons de même, dans  $Q(t)$ ,  $a' = -\sqrt{b'^2 - 1} e^{-\nu'}$ ,  $c' = -\sqrt{b'^2 - 1} e^{\nu'}$ . On a alors  $z = bb' + \sqrt{b^2 - 1} \sqrt{b'^2 - 1} \operatorname{ch}(\nu' - \nu)$ ;  $b$  et  $b'$  sont eux-mêmes les valeurs de  $z$  associées aux deux couples de polynômes  $P(t)$ ,  $2t$  et  $Q(t)$ ,  $2t$ . Les zéros de  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $2t$  sont respectivement

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} e^{\nu}, & \tau_2 &= -\sqrt{\frac{b+1}{b-1}} e^{\nu}, \\ \sigma_1 &= \sqrt{\frac{b'-1}{b'+1}} e^{\nu}, & \sigma_2 &= \sqrt{\frac{b'+1}{b'-1}} e^{\nu'}; \quad 0, \infty. \end{aligned}$$

Ceci posé, développons à l'aide de (85, III) la puissance  $(-n-1)^{\text{ème}}$  dans

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(t)^n}{P(t)^{n+1}} dt = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(t)^n}{(zt)^{n+1}} \left[ \frac{P(t)}{2t} \right]^{-n-1} dt;$$

si  $\mathcal{R}(b) > 0$ , il vient, à un facteur  $e^{2kn\pi i}$  ( $k$  entier) près,

$$P_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-1}^m(b) \frac{\tau_2^{-m}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \frac{Q(t)}{2t} \right]^n \frac{dt}{t^{-m+1}},$$

et, grâce à (83, III) et (84, III),

$$P_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-1}^m(b) J_n^{-m}(b') \tau_2^{-m} \sigma_2^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_n^m(b) P_n^{-m}(b') e^{m(\nu'-\nu)}.$$

Il suffit que le même contour  $\Gamma$  convienne aux expressions de  $P_n(z)$  et  $J_n^{-m}(b')$ , et soit situé dans la couronne de convergence

$$|\tau_1| < |t| < |\tau_2|$$

du développement; il suffit donc que  $|\sigma_1| < |\tau_2|$  et  $|\sigma_2| > |\tau_1|$ . c'est-à-dire

$$|\mathcal{R}(\nu' - \nu)| < \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \frac{b'+1}{b'-1} \right|.$$

Ceci exige d'ailleurs que  $\left| \frac{b+1}{b-1} \frac{b'+1}{b'-1} \right| > 1$ , donc  $\mathcal{R}(b)$  ou  $\mathcal{R}(b') > 0$ .

En faisant tendre  $b$  vers 1, on voit que  $k = 0$ , et enfin, en permutant les rôles de  $b$  et  $b'$ , on a ainsi démontré le

**THÉORÈME I.** — Si  $\left| \frac{b+1}{b-1} \frac{b'+1}{b'-1} \right| > 1$ , on a

$$\begin{aligned} (1) \quad & P_n(bb' + \sqrt{b^2-1} \sqrt{b'^2-1} \text{ch } \zeta) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_n^m(b) P_n^{-m}(b') e^{m\zeta} \\ &= P_n(b) P_n(b') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} P_n^m(b) P_n^{-m}(b') \text{ch } m\zeta, \end{aligned}$$

pourvu que  $|\mathcal{R}(\zeta)| < \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \frac{b'+1}{b'-1} \right|$ . Le développement converge uniformément par rapport à  $\zeta$  dans tout domaine fermé vérifiant l'inégalité [24, d].

Cette inégalité est nécessaire. En effet, si  $\zeta = \xi + i\omega$ ,  $z$  décrit une ellipse  $E(\xi)$  quand  $\omega$  varie seul. Les ellipses associées à des valeurs fixes de  $b, b'$ , constituent un faisceau homofocal de centre  $z_0 = bb'$  et de foyers  $z_1 = bb' + \sqrt{b^2 - 1} \sqrt{b'^2 - 1}$ ,  $z_{-1} = bb' - \sqrt{b^2 - 1} \sqrt{b'^2 - 1}$ .  $E(0)$  est le segment focal, et  $E(\xi)$ , qui s'amplifie avec  $|\xi|$ , passe par 1 pour  $\xi_1 = \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \frac{b'+1}{b'-1} \right|$ , et par  $-1$  pour  $\xi_{-1} = \frac{1}{2} \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \frac{b'+1}{b'-1} \right|$ . Dans les conditions de l'énoncé, la suffisance de  $|\xi| < \xi_{-1}$  entraîne que  $E(\zeta)$  ne peut pas traverser la coupure  $(-1, -\infty)$  de  $P_n(z)$  tant que  $|\xi| < \xi_{-1}$ ; elle la traverse donc dès que  $|\xi| > \xi_{-1}$ , ce qui rend impossible l'égalité (1) dont, seul, le second membre est continu à travers cette demi-droite.

En supposant  $\mathcal{R}(b) > 0$  et  $\mathcal{R}(b') > 0$ , et  $\xi = 0$ , on a l'énoncé de Hobson [20, e], généralisant ou précisant lui-même des énoncés antérieurs [27, e; 17, a; 48].

32. Au lieu de  $\Gamma$ , utilisons le contour  $\Gamma'$ . Le même raisonnement donne, au facteur  $e^{2kn\pi i}$  près, l'égalité

$$(2) \quad Q_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-1}^m(b) \frac{\Gamma(m-n)}{\Gamma(-n)} \left( \frac{b'+1}{b'-1} \right)^{-\frac{m}{2}} Q_n^m(b') \left( \frac{\sigma_2}{\tau_2} \right)^m \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_n^m(b) Q_n^m(b') e^{m(\nu'-\nu)},$$

en supposant  $\mathcal{R}(b) > 0$ , que  $\Gamma'$  ne traverse ni l'arc de cercle  $\tau_1 \tau_2$  dont le prolongement passe par  $\sigma_1$ , ni la demi-droite  $(0, -\sigma_1 \infty)$ , et que l'on ait, le long de  $\Gamma'$ ,  $|\tau_1| < |t| < |\tau_2|$ . Les deux coupures traversent la couronne circulaire  $|\tau_1| < |t| < |\tau_2|$  et l'on voit qu'il suffit que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  soient dans une même partie connexe de celle-ci. On trouve ainsi les conditions  $-\xi_1 < \mathcal{R}(\nu' - \nu) < \xi_{-1}$  et  $-\xi_{-1} < \mathcal{R}(\nu' - \nu) < \xi_1$ , c'est-à-dire

$$(3) \quad 1, \left| \frac{b'-1}{b'+1} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{b'+1}{b'-1} \right| < \left| \frac{b+1}{b-1} \right|, \quad \text{et} \quad |\mathcal{R}(\nu' - \nu)| < \xi_1 \text{ et } \xi_{-1},$$

pour que le développement converge, l'égalité de sa somme avec  $Q_n(z)$  étant assurée si  $\sigma_1, \sigma_2$  sont dans la même région connexe. Ces conditions sont remplies si  $\nu' = \nu = 0$ , car  $\tau_1, \tau_2$  et  $\sigma_1, \sigma_2$  sont de part et d'autre de l'axe imaginaire;  $z$  est alors en  $z_1$ ; on voit même que  $k=0$

en faisant tendre  $b$  vers 1. Quand  $\xi = \nu' - \nu$  varie, à partir de  $\xi = 0$ , le prolongement de (2) se fait donc, à l'intérieur de la plus petite des deux ellipses  $E(\xi_1)$ ,  $E(\xi_{-1})$ , tant que  $z$  ne traverse pas la coupure  $(-\infty, 1)$  de  $Q_n(z)$ . Cette ellipse ne contient qu'une partie de  $(-\infty, -1)$  ou de  $(-1, 1)$ ; quand  $z$  passe de l'autre côté de  $(-\infty, -1)$ , (35, III) montre que le prolongement du développement est  $Q_n(z) e^{-2n\pi i(saz)}$ , tandis que de l'autre côté de  $(-1, 1)$ , il résulte de (29, III) que c'est  $Q_n(z) + \pi i(saz) P_n(z)$ . On a ainsi le

THÉORÈME II. — *Sous les conditions*  $\left| \text{Log} \left| \frac{b'+1}{b'-1} \right| \right| < \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right|$  *et*  $|\mathcal{R}(\zeta)| < \zeta_{-1}$  *et*  $\xi_1$ ,

$$(4) \quad P_n(b) Q_n(b') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} P_n^m(b) Q_n^{-m}(b') \text{ch } m\zeta \\ = \begin{cases} e^{n\pi i(saz-saz_1)} Q_n(z), \\ Q_n(z) + \pi i(saz) P_n(z), \end{cases}$$

avec  $z = bb' + \sqrt{b^2-1} \sqrt{b'^2-1} \text{ch } \zeta$ , suivant que le segment de droite  $z_1 z$  ne traverse pas ou traverse la coupure  $(-1, 1)$ . La convergence est uniforme par rapport à  $\zeta$  dans tout domaine fermé vérifiant l'inégalité [24, d].

En particulier, si  $\mathcal{R}(b') > 0$  et  $\xi = 0$ , on a l'énoncé d'Hobson [20, e], généralisant lui-même des énoncés antérieurs [17, a; 32, b]; l'ellipse  $E(\xi_1)$  est le domaine de validité, donc la première expression de (4) est toujours  $Q_n(z)$ .

33. L'extension des théorèmes précédents lorsque  $\mathcal{R}(b)$  et  $\mathcal{R}(b')$  sont quelconques découle de (8, III) et (14, III) [20, e]. Il est plus intéressant de les prolonger sur la coupure  $(-1, 1)$ . Soit  $b = \cos \theta + oi$ ,  $b' = \cos \theta' + oi$  ( $0 < \theta, \theta'; \theta + \theta' < \pi$ ); on a  $\sqrt{b^2-1} = i \sin \theta + o \cot \theta$ ,  $\sqrt{b'^2-1} = i \sin \theta' + o \cot \theta'$ , donc  $z \sim \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \text{ch } \zeta$ , et la continuité de  $P_n(z)$  à travers cette coupure, jointe à (28, III) donne, pour  $\xi = 0$ ,

$$(5) \quad P_n(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) \\ = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} P_n^m(\cos \theta) P_n^{-m}(\cos \theta') \cos m\omega,$$

pourvu que  $0 < \theta$ ,  $0 < \theta'$ ,  $\theta + \theta' < \pi$ . Pour le théorème II, les conditions deviennent  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ;  $\theta < \theta' < \pi - \theta$ ,  $|\mathcal{R}(\zeta)| < \text{Log}\left(\cot \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta'}{2}\right)$  et  $\text{Log}\left(\cot \frac{\theta}{2} \text{tang} \frac{\theta'}{2}\right)$ ; on voit que  $\arg z_1 > 0$ , donc, compte tenu de (28, III), (31, III) et (5), on a, pour  $\xi = 0$ ,

$$(6) \quad Q_n(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos \omega) \\ = P_n(\cos \theta) Q_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} P_n^m(\cos \theta) Q_n^{-m}(\cos \theta') \cos m \omega.$$

Les développements (5) et (6) convergent uniformément par rapport à  $\omega$ . Leur extension aux autres valeurs de  $\theta$ ,  $\theta'$  se fait comme déjà dit.

34. Dans le raisonnement du paragraphe 32, le développement (93, III) au lieu de (85, III) donne une égalité ne différant de (2) que par les valeurs prises par l'indice  $m$ . Les conditions de validité sont que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  soient dans le plus petit des 2 cercles de centre O et passant par  $\tau_1$  ou  $\tau_2$ , et que  $\Gamma'$  soit dans ce cercle sans traverser la coupure  $(0, -\sigma_1 \infty)$ . Ces deux dernières conditions sont toujours réalisables, et, en posant  $\nu - \nu' = \zeta$ , on a

**THÉORÈME III.** — *Sous la condition*

$$\mathcal{R}(\zeta) > \frac{1}{2} \left[ \left| \text{Log} \left| \frac{b+1}{b-1} \right| \right| + \left| \text{Log} \left| \frac{b'+1}{b'-1} \right| \right| \right],$$

$$(7) \quad e^{2kn\pi i} Q_n(bb' + \sqrt{b^2-1} \sqrt{b'^2-1} \text{ch} \zeta) = \sum_{m-n-1=0}^{\infty} P_n^m(b) Q_n^{-m}(b') e^{-m\zeta}.$$

*La convergence est uniforme par rapport à  $\zeta$  dans tout domaine fermé vérifiant l'inégalité [24, d].*

Le domaine de validité est l'extérieur de la plus grande des deux ellipses  $E(\xi_1)$ ,  $E(\xi_{-1})$ . Toute ellipse plus petite traversant la coupure essentielle  $(-1, 1)$  de  $Q_n(z)$ , l'inégalité de l'énoncé est la meilleure possible. Pour préciser la valeur de  $k$ , déplaçons  $z$  sur la branche d'hyperbole du faisceau homofocal, sans sortir du domaine;  $b$ ,  $b'$ ,  $\omega$  restent fixes, et, pour  $\xi = \infty$ , il résulte des valeurs de  $P_n^{n+1}(b)$

et  $Q_n^{-n-1}(b')$ , déduites d'une expression donnée au paragraphe 28, que  $k = 0$  si  $|\arg \sqrt{b^2 - 1} + \arg \sqrt{b'^2 - 1} + \omega| < \pi$ ; on voit alors, grâce à (35, III) que  $k = 0$  ou  $(sax)$  suivant que cette branche infinie d'hyperbole ne traverse pas ou traverse la coupure  $(-\infty, -1)$ . Avec  $b = iv$  ( $v > 0$ ) et  $b' = -iv'$  ( $v' > 0$ ), le domaine de validité  $\xi > 0$  correspond, pour  $z$ , au plan coupé par le segment rectiligne

$$(vv' - \sqrt{v^2 + 1} \sqrt{v'^2 + 1}, vv + \sqrt{v^2 + 1} \sqrt{v'^2 + 1}),$$

et  $k = 0$  si  $|\omega| < \pi$ ; grâce à (8, III), (10, III) et (13, III), on a donc [17, a; 20, h]

$$Q_n(vv' + \sqrt{v^2 + 1} \sqrt{v'^2 + 1} \operatorname{ch} \xi) = \frac{1}{2 \cos^2 n \pi} \sum_{m-n-1=0}^{\infty} \frac{Q_n^m(iv) Q_n^m(iv')}{\Gamma(m-n) \Gamma(m+n+1)} e^{-m(\xi - \pi i)} \quad (v, v', \xi > 0).$$

35. On obtient des formules d'addition d'un autre genre [24, a] en développant différemment les 2 membres de

$$(8) \quad \left[ \lambda x + \lambda \frac{Q(t)}{P(t)} \right]^n \equiv \left[ \frac{a'' t^2 + 2b'' t + c''}{P(t)} \right]^n,$$

où  $a'' = \lambda(ax + a')$ , ... et  $\lambda^2(1 + 2xz + x^2) = 1$  de façon que  $b''^2 - a''c'' = 1$ . Par la série de Taylor et (85, III), le premier membre donne la série double

$$(9) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \binom{n}{p} \lambda^n x^{n-p} J_p^m(z) R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^m \quad [R(z) > 0],$$

$p$  étant entier  $> 0$ ,  $J_p^m(z) = 0$  pour  $|m| \geq p$ . Il résulte de (87, III) que le premier membre de cette égalité admet la valeur majorante (5, II), et, par conséquent, (9) converge absolument si

$$\frac{e^\chi}{|x|} < \left| \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) \right| < |x| e^{-\chi},$$

où  $z = ch(\chi + i\theta)$ , et  $\chi \geq 0$ . La comparaison avec le développement du second membre de (8) par (85, III) donne alors

$$J_n^m(z') = \lambda^n R(\sigma_2', \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^m \sum_{p=|m|}^{\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} J_p^m(z) \quad [R(z') > 0],$$

où  $z' = \lambda(x + z)$ ,  $\sigma'_2 = \frac{-b' - 1}{a'}$ ; en remarquant que

$$\frac{\sigma_2 - \tau_1}{\sigma_2 - \tau_2} = \frac{ab' - ba + a - az}{a(1 - z)},$$

l'expression analogue relative à  $\sigma'_2$ , donne  $R(\sigma'_2, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \lambda \frac{z - 1}{z' - 1}$ , d'où résulte enfin

$$(10) \quad J_n^m(z') = \lambda^{n+m} \left( \frac{z-1}{z'-1} \right)^m \sum_{p=|m|}^{\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} J_p^m(z) \quad (m \text{ entier}),$$

où  $z' = \lambda(x + z)$ .  $\lambda^2(1 + 2xz + x^2) = 1$ , et sous les conditions  $\Re(z) > 0$ ,  $\Re(z') > 0$ ,  $|x| > e\lambda \geq 1$ . Avec les fonctions de Hobson, cela s'écrit

$$(10') \quad (z'^2 - 1)^{\frac{m}{2}} P_n^m(z') = \lambda^{n+m} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \sum_{p=|m|}^{\infty} \binom{m+n}{m+p} x^{n-p} P_p^m(z).$$

Pour  $m = 0$ , on peut écrire symboliquement

$$P_n \left( \frac{x+z}{\sqrt{1+2xz+x^2}} \right) = \left( \frac{x+P(z)}{\sqrt{1+2xz+x^2}} \right)^n.$$

Une autre forme intéressante s'obtient avec

$$z = \cos \theta > 0, \quad z' = \cos \theta' > 0, \quad x = \frac{c}{r}, \quad \lambda = \frac{r}{r'} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta},$$

ou  $r, r', c$  sont les côtés d'un triangle dont les angles opposés à  $r$  et  $r'$  sont  $\theta'$  et  $\pi - \theta$ . Si  $z = \cos \theta + oi$ , on voit que  $z' = \cos \theta' + oi$ , et, grâce à (28, III), (10') prend la forme d'une formule d'addition des fonctions zonales

$$r'^n P_n^m(\cos \theta') = \sum_{p=|m|}^{\infty} \binom{m+n}{m+p} c^{n-p} r^p P_p^m(\cos \theta) \\ \left( |\theta|, |\theta'| < \frac{\pi}{2}, m \text{ entier} \right),$$

établie par Hobson [20, h] pour  $n$  entier, et valable pour  $c > r$  lorsque  $n$  est quelconque.

CHAPITRE V.

EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE  $P_n^m(\cos \theta)$  ET  $Q_n^m(\cos \theta)$ .

36. Lorsque  $\Re(m+n+1) > 0$ ,  $\Re\left(\frac{1}{2} - m\right) > 0$ , (40, III), où l'on pose  $t = 1 - u$ , peut s'écrire

$$(1) \quad Q_n^{(m)}(z) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \frac{2^m \eta^{m-n}}{\sqrt{\eta^2 - 1}^{2m+1}} \\ \times \int_0^1 u^{-m-\frac{1}{2}} (1-u)^{m+n} \left(1 + \frac{u}{\eta^2 - 1}\right)^{-m-\frac{1}{2}} du,$$

avec  $\arg u = 0$  et  $|\arg \sqrt{\eta^2 - 1}| < \pi$ . Soit d'abord  $m = 0$ ,  $n > -1$ , et posons [42]

$$\left(1 + \frac{u}{\eta^2 - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dv}{1 + \frac{u \sin^2 v}{\eta^2 - 1}} \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(-1)^r u^r \sin^{2r} v}{(\eta^2 - 1)^r} + \frac{(-1)^p u^p \sin^{2p} v}{(\eta^2 - 1)^p \left(1 + \frac{u \sin^2 v}{\eta^2 - 1}\right)} \right] dv.$$

La substitution dans (1) donne un développement limité de  $Q_n(z)$ , dont le reste  $R_p$  s'exprime par une intégrale double. Pour  $z = \cos \theta + oi$ , il résulte de

$$\left|1 + \frac{u \sin^2 v}{\eta^2 - 1}\right| = \left|1 - \frac{u \sin^2 v}{2} - \frac{u \sin^2 v}{2} \cot \theta\right| \geq 1 - \frac{u \sin^2 v}{2} \geq \frac{1}{2}$$

que  $|R_p|$  ne surpasse pas le double du coefficient général de rang  $p + 1$ . On obtient ainsi, grâce a (31, III), les formes limitées des développements (47, III) et (48, III) relatifs à  $m = 0$  [26; 17, a; 42; 20, a],

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\pi}}{2} P_n(\cos \theta) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} Q_n(\cos \theta) \end{array} \right\} \\ = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \sum_{r=0}^p \frac{(2r-1)!!^2}{(2r)!! (2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r+1)} \frac{c_r}{(2 \sin \theta)^{r+\frac{1}{2}}},$$

où  $c_r = \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} + r \right) \theta - \frac{2r \pm 1}{4} \pi \right]$  ( $r < p$ ) et  $|c_p| < 2$ .  $p$  étant fixé et  $n$  croissant infiniment, on voit que le reste

$$(3) \quad R_p = O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right), \quad \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ quelconque}).$$

En dérivant l'intégrale double représentant  $R_p$ , on voit de même aisément [20,  $h$ ] que

$$(4) \quad \frac{dR_p}{d \cos \theta} = n O\left(n^{-p-\frac{1}{2}}\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}-p}\right),$$

la dérivée par rapport à  $\theta$  ayant évidemment la même propriété.

37.  $m$  et  $n$  étant réels, formons le développement de Maclaurin-Darboux [20,  $\alpha$ ]

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{u}{\eta^2 - 1}\right)^{-m-\frac{1}{2}} &= \sum_{r=0}^{p-1} \binom{-m-\frac{1}{2}}{r} \left(\frac{u}{\eta^2 - 1}\right)^r \\ &\quad + \binom{-m-\frac{1}{2}}{p} \left(\frac{u}{\eta^2 - 1}\right)^p \lambda(u) \left(1 + \frac{\theta' u}{\eta^2 - 1}\right)^{-m-p-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où  $0 < \theta' < 1$ ,  $|\lambda(u)| < 1$ ,  $\lambda(u)$  étant en outre uniforme aux points  $u = 0$  et  $u = 1$ . Le reste  $R_p$  du développement limité de  $Q_n^m(z)$  est alors

$$(5) \quad R_p = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin n\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(-m-p+\frac{1}{2}\right)} \frac{2^m \eta^{n-m} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{(\eta^2 - 1)^{m+p+\frac{1}{2}}} \\ \times \int_0^1 u^{p-m-\frac{1}{2}} (1-u)^{m+n} \lambda(u) \left(1 + \frac{\theta' u}{\eta^2 - 1}\right)^{-m-p-\frac{1}{2}} du,$$

et le terme général s'en déduit en faisant  $\lambda(u) = 1$ ,  $\theta' = 0$ . Pour  $z = \cos \theta + oi$ , on a, comme plus haut,  $\left|1 + \frac{\theta' u}{\eta^2 - 1}\right| \geq \frac{1}{2}$ , et l'intégrale est majorée par le produit de  $2^{m+p+\frac{1}{2}}$  et de l'intégrale relative au terme général de rang  $p+1$ . On peut n'effectuer que pour  $R_p$ , et non pour les termes qui le précèdent, la transformation de l'intégrale de lacets de (40, III) en l'intégrale définie; il suffit donc de  $m+n+1 > 0$ ,  $p > m - \frac{1}{2}$  et  $-m - \frac{1}{2}$  pour que soient valables les formes limitées

des développements (47, III) et (48, III)

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi}}{2} P_n^m(\cos \theta) \\ & \frac{\sin n \pi \sin(m+n)\pi}{\sqrt{\pi} \cos m \pi} Q_n^m(\cos \theta) \end{aligned} \right\} \\ = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \\ \times \sum_{r=0}^p \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)\dots[(2r-1)^2-4m^2]}{(2r)!!(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2r+1)} \frac{c_r}{(2 \sin \theta)^{r+\frac{1}{2}}},$$

où  $c_r = \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} + r \right) \theta - \frac{2r-2m \pm 1}{4} \pi \right]$  ( $r < p$ ) et  
 $|c_p| \leq 2^{m+p+\frac{1}{2}}$ .

Soit  $\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) et  $m, p$  fixes; on voit que, si  $n$  croît infiniment,

$$(7) \quad R_p = O\left(n^{m-p-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dR_p}{d\theta} = O\left(m-p+\frac{1}{2}\right).$$

Le cas général où  $m, n$  sont complexes, et l'argument quelconque, a été étudié par Barnes [2] et Watson [46].

38. C'est aux résultats de Stieljès [42], améliorés et généralisés à plusieurs reprises [20, d, f; 22; 15; 11] que sont dues les inégalités

$$(8) \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} |P_n(\cos \theta)| \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} |Q_n(\cos \theta)| < \frac{1}{\sqrt{n \sin \theta}} \quad (n \geq 1, 0 < \theta < \pi),$$

et à Hobson [20, f, h] l'extension aux fonctions généralisées. Considérons avec Hobson l'expression (1) de  $Q_n^{(-m)}(\cos \theta \pm oi)$ , avec  $n - m + 1 > 0, m + \frac{1}{2} > 0$ , d'où résulte pour  $Q_n^{-m}$ ,

$$(9) \quad |Q_n^{-m}(\cos \theta \pm oi)| \leq \left| \frac{\sin(n-m)\pi}{\sin n \pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \right| \frac{1}{\sqrt{2 \sin \theta}} \\ \times \int_0^1 \frac{u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-m} \left| 1 - \frac{u}{2} \mp \frac{iu}{2} \cot \theta \right|^m}{\sqrt{\left| 1 - \frac{u}{2} \mp \frac{iu}{2} \cot \theta \right|}} du.$$

Les inégalités

$$(10) \quad 1 - u \leq 1 - \frac{u}{2} \leq \left| 1 - \frac{u}{2} \mp \frac{uu}{2} \cot \theta \right| \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad (0 \leq u \leq 1)$$

permettent, si  $m \geq 0$  et  $n - m + \frac{1}{2} > 0$ , de majorer l'intégrale par

$$(11) \quad \sin^{-m} \theta \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}} (1-u)^{n-m-\frac{1}{2}} du = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \sin^m \theta},$$

tandis que, lorsque  $m \geq 0$  et  $-1 < n - m \leq -\frac{1}{2}$ , on substitue au dénominateur  $\sqrt{\frac{1}{2} \leq \sqrt{1 - \frac{u}{2}}}$  au lieu de  $\sqrt{1-u}$ , ce qui donne la valeur majorante

$$(11') \quad \sqrt{2} \sin^{-m} \theta \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}} (1-u)^{n-m} du = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n - m + 1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{\sqrt{2}}{\sin^m \theta}.$$

D'autre part, le développement asymptotique de  $\text{Log} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma\left(n+\alpha+\frac{1}{2}\right)}$  montre que

$$(12) \quad \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma\left(n+\alpha+\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \left(\alpha > \frac{1}{4}\right)$$

si  $n$  est assez grand; on en déduit

$$\frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma\left(n+\alpha-\frac{1}{2}\right)} < \frac{n+\alpha-\frac{1}{2}}{(n+\alpha-1)\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

donc (12) est vrai quel que soit  $n > 0$ . Grâce enfin à (31, III), on voit ainsi [24, c], que

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin^m \theta |P_n^{-m}(\cos \theta)| \\ \frac{\sin^m \theta}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{\sin n \pi \cos m \pi}{\sin(n-m)\pi} Q_n^{-m}(\cos \theta) \right| \end{array} \right\} < \frac{1}{\sqrt{n} \sin \theta} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2}} \quad \left(0 < n > m - \frac{1}{2}, m \geq 0\right), \\ \frac{\Gamma(n - m + 1)}{\Gamma(n + 1)} \quad \left(0 < n > m - 1, m \geq 0\right) \end{array} \right.$$

[10, III] permet de passer à  $Q_n^m(\cos \theta \pm oi)$ ; en se bornant au cas  $n - m + 1 > 0$ , il vient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin^m \theta |P_n^m(\cos \theta)| \\ \frac{\sin^m \theta}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{\sin n \pi \cos m \pi}{\sin(n+m)\pi} Q_n^m(\cos \theta) \right| \end{array} \right\} < \frac{1}{\sqrt{n \sin \theta}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}$$

( $0 < n > m - 1, m \geq 0$ ).

Pour  $m = 0$ , (13) donne des inégalités plus avantageuses que (8)

$$(15) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} |P_n(\cos \theta)| \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} |Q_n(\cos \theta)| < \frac{1}{\sqrt{n \sin \theta}}$$

( $n > 0, 0 < \theta < \pi$ ).

39. Sans changer les hypothèses, on déduit encore de (1)

$$\begin{aligned} & |Q_n^{-m}(\cos \theta \pm oi) - Q_{n+2}^{-m}(\cos \theta \pm oi)| \\ & \leq \left| \frac{\sin(n-m)\pi}{\sin n \pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \right| \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \quad \times \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}} (1-u)^{n-m} \left| 1 - \frac{u}{2} \mp \frac{iu}{2} \cot \theta \right|^m K^{\frac{1}{4}} du, \end{aligned}$$

où  $K = |1 - e^{\pm 2i\theta} (1-u)^2|^4 \times \left| \left(1 - \frac{u}{2}\right) \sin \theta \mp \frac{iu}{2} \cos \theta \right|^{-2}$ ; avec  $1 - u = \nu$ , on a encore  $K = 4 \frac{[(1+\nu^2)^2 - 4\nu^2 \cos^2 \theta]^2}{(1+\nu)^2 - 4\nu \cos^2 \theta}$ , dont la discussion de la variation en fonction de  $\cos^2 \theta$  montre que  $K \leq 16$ . Compte tenu de (10), l'intégrale est donc majorée par

$$\frac{2}{\sin^m \theta} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n-m+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}$$

si  $m \geq 0, n - m + 1 > 0$ , et, par suite

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin^m \theta |P_n^{-m}(\cos \theta) - P_{n+2}^{-m}(\cos \theta)| \\ \frac{\sin^m \theta}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{\sin n \pi \cos m \pi}{\sin(n-m)\pi} [Q_n^{-m}(\cos \theta) - Q_{n+2}^{-m}(\cos \theta)] \right| \end{array} \right\} \\ \leq \frac{\sqrt{2} \Gamma(n-m+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} < \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+1)},$$

où  $m \geq 0$ ,  $0 < n < m - 1$ . En particulier, on a, pour  $m = 0$ ,

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|P_n(\cos \theta) - P_{n+2}(\cos \theta)|}{2} \\ \text{et} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|Q_n(\cos \theta) - Q_{n+2}(\cos \theta)|}{2} < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{array} \right. \quad (n > 0, 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Ces inégalités, établies par Stieljès et Hobson [42, b; 20, h] sous une forme un peu moins précisée, sont d'un intérêt évident pour l'étude de l'uniformité de la convergence des séries de Legendre.

## CHAPITRE VI.

### SÉRIES DE LEGENDRE.

40. On a vu dans l'introduction que le polynome de degré  $n$  qui fournit la meilleure approximation en moyenne d'une fonction  $f(x)$ , sur  $(-1, 1)$ , est de la forme  $f_n(x) = \sum_{m=1}^n \lambda_m P_m(x)$  où  $\lambda_m$  ne dépend pas de  $n$ ; d'ailleurs, les équations (3; O) équivalent à

$$\int_{-1}^1 P_m(x) [f(x) - f_n(x)] dx = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n),$$

d'où résultent la valeur des  $\lambda_m$

$$(1) \quad \lambda_m = \frac{1}{\omega_m} \int_{-1}^1 P_m(x') f(x') dx',$$

et, compte tenu de (31; II), l'expression remarquable

$$(2) \quad f_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(x') P_n(x) - P_n(x') P_{n+1}(x)}{x - x'} f(x') dx'.$$

A la question de la convergence de  $f_n$  vers  $f$ , quand  $n$  croît infiniment, répond, après de nombreuses études antérieures [37; 10; 4; 9] le théorème suivant de Hobson [20. c, d] :

**THÉOREME.** —  $f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$  étant sommable dans  $(-1, 1)$ ,  $f_n(\cos \theta)$  converge en tout point intérieur où converge la série de Fourier de  $f(\cos \theta) \sqrt{\sin \theta}$  dans l'intervalle  $0 \leq \theta \leq \pi$ ; sa limite

est alors le quotient par  $\sqrt{\sin \theta}$  de la somme de cette série. Enfin, la convergence de  $f_n$  est uniforme dans tout intervalle intérieur dans lequel la série de Fourier converge uniformément.

Par hypothèse  $f(\cos \theta)\sqrt{\sin \theta}$  est sommable dans  $0 \leq \theta \leq \pi$ , et  $f(x)$  dans  $-1 \leq x \leq 1$ . En désignant par  $F(x', x, n)$  le facteur de  $f(x') dx'$  dans l'intégrandum de (2), on peut associer à tout couple de nombres positifs  $\mu, \eta$ , un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\left| \int_{-1}^{-1+\varepsilon} F(x', x, n) f(x') dx' \right| < \frac{\eta}{2}$$

dans  $-1 + \varepsilon + \mu \leq x \leq 1 - \varepsilon - \mu$ , et cela quel que soit  $n$ , puisque  $\sqrt{n+1} P_{n+1}(x')(1-x'^2)^{\frac{1}{4}}$  et  $\sqrt{n} P_n(x)$  sont uniformément bornés en vertu de (15, V). On peut ainsi supposer que

$$(3) \quad \left| f_n(x) - \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} F(x', x, n) f(x') dx' \right| < \eta$$

$(-1 + \varepsilon + \mu \leq x \leq 1 - \varepsilon - \mu),$

quel que soit l'entier  $n$ . Dans  $-1 + \varepsilon \leq x' \leq x - \mu$ , on voit de même que  $|F(x', x, n)| < \frac{C}{\mu}$ , où  $C$  une constante indépendante de  $n$ ; en outre, dans tout intervalle  $(\alpha, \beta)$  intérieur, la formule de la moyenne de Bonnet donne

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} F(x', x, n) dx' \\ &= \frac{n+1}{2} \left[ \frac{P_n(x)}{\alpha-x} \int_{\alpha}^{\xi} P_{n+1}(x') dx' + \frac{P_n(x)}{\beta-x} \int_{\xi}^{\beta} P_{n+1}(x') dx' \right. \\ & \quad \left. - \frac{P_{n+1}(x)}{\alpha-x} \int_{\alpha}^{\xi'} P_n(x') dx' - \frac{P_{n+1}(x)}{\beta-x} \int_{\xi'}^{\beta} P_n(x') dx' \right] \\ & \quad (\alpha < \xi < \beta, \alpha < \xi' < \beta), \end{aligned}$$

d'où résulte, grâce à (21, I), que

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x', x, n) dx' = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

quand  $n$  augmente indéfiniment. Ces 2 conditions permettent d'appliquer le théorème général de convergence de Hobson <sup>(1)</sup> [20, c, p. 350]

<sup>(1)</sup> Par exemple, voir HOBSON, *Theory of functions of a real variable*, t. 2 (1926), p. 422 et 443.

en vertu duquel  $\int_{-1+\varepsilon}^{x-\mu} F(x', x, n) f(x') dx'$  tend uniformément vers 0 quand  $n$  croît infiniment.

Il en est de même pour l'intervalle  $(x + \mu, 1 - \varepsilon)$ , et l'on peut ainsi choisir  $\varepsilon$  et  $N$  de façon que

$$(4) \quad \left| f_n(x) - \int_{x-\mu}^{x+\mu} F(x', x, n) f(x') dx' \right| < 2\eta$$

pour  $n > N$ ,  $-1 + \varepsilon + \mu \leq x \leq 1 - \varepsilon - \mu$ .

Posons  $x = \cos \theta$ ,  $x' = \cos \theta'$  et substituons aux polynômes de Legendre dans  $F$  leurs expressions (2, V) où  $p = 2$ , soit

$$(5) \quad P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \times \left[ \frac{\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{2 \sin \theta}} + \frac{1}{2(2n+3)} \frac{\cos \left[ \left( n + \frac{3}{2} \right) \theta - \frac{3\pi}{4} \right]}{(2 \sin \theta)^{\frac{3}{2}}} \right] + p_{n,2}(\theta).$$

Les premiers termes de ces développements fournissent ainsi l'intégrale

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n+2)^2}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)} \times \int_{x-\mu}^{x+\mu} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos \left[ \left( n + \frac{3}{2} \right) \theta' - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \\ - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta' - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[ \left( n + \frac{3}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \end{array} \right\}}{(\cos \theta' - \cos \theta) \sqrt{\sin \theta} \sin \theta} f(\cos \theta') dx' \\ = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sin \theta}} \frac{\Gamma(n+2)^2}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)} \times \int_{\theta-\nu_0}^{\theta+\nu_0} \left[ \frac{\sin(n+1)(\theta' - \theta)}{\sin \frac{\theta - \theta'}{2}} - \frac{\cos(n+1)(\theta' + \theta)}{\sin \frac{\theta + \theta'}{2}} \right] \\ \times f(\cos \theta') \sqrt{\sin \theta'} d\theta',$$

avec  $\cos(\theta - \nu_0) = x + \mu$ ,  $\cos(\theta + \nu_0) = x - \mu$ . Si  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont assez petits,  $\nu_0, \nu'_0$  ont, dans l'intervalle  $-1 + \varepsilon + \mu \leq x \leq 1 - \varepsilon - \mu$ , la même borne inférieure  $\nu = 2 \operatorname{Arc} \sin \frac{\mu}{2}$ , qu'on peut leur substituer dans (6). En effet, le facteur de l'intégrale est borné, et l'on a par exemple, grâce au théorème de la moyenne de Bonnet,

$$\int_{\theta - \nu'_0}^{\theta - \nu} \frac{\sin(n+1)(\theta' - \theta)}{\sin \frac{\theta' - \theta}{2}} f(\cos \theta) \sqrt{\sin \theta'} d\theta'$$

$$= \left[ \frac{1}{\sin \frac{\nu'_0}{2}} \int_{\theta - \nu'_0}^{\theta - \xi} + \frac{1}{\sin \frac{\nu}{2}} \int_{\theta - \xi}^{\theta - \nu} \right] f(\cos \theta') \sqrt{\sin \theta'} \sin(n+1)(\theta - \theta') d\theta',$$

où les intégrales tendent uniformément vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ , puisque  $f(\cos \theta') \sqrt{\sin \theta'}$  est sommable. Dans l'intégrale (6) ainsi modifiée, la deuxième partie s'écrit  $\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \Phi(x', x, n) \frac{f(\cos \theta')}{\sqrt{\sin \theta'}} dx'$ , où

$$\Phi = \frac{\cos(n+1)(\theta' + \theta)}{\sin \frac{\theta' + \theta}{2}}$$

pour  $\theta - \nu \leq \theta' \leq \theta + \nu$  et  $\Phi = 0$  pour les autres valeurs de  $\theta'$ ;  $\Phi$  étant borné, et son intégrale prise dans tout intervalle intérieur à  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$  tendant uniformément vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ , cette deuxième partie tend elle-même uniformément vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ . Le même raisonnement s'applique à l'intégrale

$$\int_{\theta - \nu}^{\theta + \nu} \frac{\sin(n+1)(\theta' - \theta) - \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta' - \theta)}{\sin \frac{\theta' - \theta}{2}} f(\cos \theta') \sqrt{\sin \theta'} d\theta',$$

de sorte que, compte tenu de  $\Gamma(n+2)^2 \sim \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{5}{2}\right)$ , (6) ne diffère de

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi \sqrt{\sin \theta}} \int_{\theta - \nu}^{\theta + \nu} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta' - \theta)}{\sin \frac{\theta' - \theta}{2}} f(\cos \theta') \sqrt{\sin \theta'} d\theta'$$

que par une quantité tendant uniformément vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ .

D'autre part, si  $p_{n,1}(\theta)$  désigne la somme des deux derniers termes au second membre de (5'), des raisonnements semblables montrent que les intégrales du type

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(n+2)^2}{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)^2} \int_{\theta-\nu_0}^{\theta+\nu_0} \left[ \frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta' - \frac{\pi}{4}\right] \cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta - \frac{3\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{1}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta' - \frac{3\pi}{4}\right] \cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{(2\sin\theta')^{\frac{1}{2}}(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ & \quad \times \frac{f(\cos\theta') \sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta', \\ & \frac{(n+1)\Gamma(n+2)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)} \int_{\theta-\nu_0}^{\theta+\nu_0} \left[ \frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta' - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2}\sin\theta'} p_{n,2}(\theta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2}\sin\theta} p_{n,2}(\theta') \right] \frac{f(\cos\theta') \sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta', \\ & \frac{n+1}{2} \int_{\theta-\nu_0}^{\theta+\nu_0} \frac{p_{n+1,1}(\theta') p_{n,1}(\theta) - p_{n,1}(\theta') p_{n+1,1}(\theta)}{\cos\theta' - \cos\theta} f(\cos\theta') \sin\theta' d\theta', \end{aligned}$$

tendent uniformément vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . Pour les deux dernières, l'intégrandum peut être exprimé par la formule des accroissements finis, et il suffit d'utiliser les propriétés asymptotiques (3, V), (4, V) relatives à  $p_{n,1}$  et  $p_{n,2}$ . En définitive, on démontre ainsi que la différence entre  $f_n(x)$  et (7) tend uniformément vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  dans tout intervalle de variation de  $x$  intérieur à  $(-1, 1)$ , et il ne reste plus qu'à observer que (7) est le quotient par  $\sqrt{\sin\theta}$  de l'intégrale qui a même limite que la somme partielle de Fourier de la fonction  $f(\cos\theta) \sin\theta$ .

Remarquons que, si l'allure de  $f(x)$  au voisinage du point intérieur  $x$  décide de la valeur limite de  $f_n(x)$ , la sommabilité de  $f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$  au voisinage des extrémités est essentielle dans la démonstration. Par exemple, Hobson démontre [20, d. p. 33] que l'intégrale  $\frac{n+1}{2} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} F(x', x, n) \frac{dx'}{(1+x')^k}$  diverge lorsque  $k \geq \frac{3}{4}$ , de

sorte que  $f_n(x)$  ne converge plus si  $f(x)$ , tout en étant sommable dans  $(-1, 1)$ , est telle que  $f(x) - A(1+x)^{-k}$  soit borné au voisinage de  $x = -1$  ( $A = \text{const.}$ ,  $k \geq \frac{3}{4}$ ).

41. Toutes choses égales d'ailleurs, il résulte du théorème de Hobson et de la théorie des séries de Fourier que  $f_n(x)$  tend vers  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  en tout point intérieur  $x$  au voisinage duquel  $f(x)$  est à variation bornée. Pour  $x = \pm 1$ , une telle condition n'est plus suffisante, bien qu'il suffise encore que  $f(x)$  soit à variation bornée dans  $(-1, 1)$ . D'une manière plus générale, Hobson démontre [20, d] :

THÉORÈME. — Si  $f(x)$  est à variation bornée au voisinage de 1 et  $-1$ , il ne suffit pas que  $f(x)$  soit sommable dans  $(-1, 1)$  pour que  $f_n(\pm 1)$  converge. Si  $f(x)$  est à variation bornée dans  $(-1, 1)$  à l'exception d'un nombre fini de points  $\xi$  au voisinage desquels

$$f(x) - A|x - \xi|^{-k} \quad (A = \text{const.}, \quad 0 < k < \frac{1}{2})$$

est à variation bornée,  $f_n(\pm 1)$  tend vers  $f_n(\pm 1 \mp 0)$ ; la convergence disparaît si, pour un point  $\xi$ ,  $k \geq \frac{1}{2}$ .

Par exemple (18, I) et (19, I) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} (8) \quad f_n(1) &= \frac{n+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x') - P_{n+1}(x')}{1-x'} f(x') dx' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [P'_n(x') + P'_{n+1}(x')] f(x') dx'. \end{aligned}$$

La limite de l'intégrale prise dans un intervalle intérieur  $(\alpha, \beta)$  dépend encore de celle de

$$\begin{aligned} (9) \quad & \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta' - \frac{\pi}{4} \right] - \cos \left[ \left( n + \frac{3}{2} \right) \theta' - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \theta'}} \frac{f(x')}{1-x'} dx' \\ &= \sqrt{n} \int_p^q \sin \left[ (n+1) \theta' - \frac{\pi}{4} \right] F(\theta') d\theta', \end{aligned}$$

où  $F(\theta')$  est sommable dans l'intervalle  $(p, q)$  comme  $f(x')$  l'est dans l'intervalle correspondant  $(\alpha, \beta)$ . Le théorème de la moyenne de Bonnet montre que cela tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  si  $F(\theta')$  est monotone dans  $(p, q)$ , donc si  $F(\theta')$  est à variation bornée dans  $(p, q)$ . Par contre, au voisinage d'un point  $\xi = \cos \varphi$  de l'énoncé, (9) contient un terme discontinu de la forme

$$\sqrt{n} \int_{\varphi - \nu'}^{\varphi + \nu} \frac{B \sin \left[ (n+1)\theta' - \frac{\pi}{4} \right]}{|\theta' - \varphi|^k} d\theta' \sim B n^{k-\frac{1}{2}} \\ \times \int_{-(n+1)\nu'}^{(n+1)\nu} \left\{ \sin \left[ (n+1)\varphi - \frac{\pi}{4} \right] \cos u + \cos \left[ (n+1)\varphi - \frac{\pi}{4} \right] \sin u \right\} \frac{du}{|u|^k},$$

où  $B = \text{const.}$  et  $\theta' = \varphi + \frac{u}{n+1}$ . Cela n'est infiniment petit que si  $k < \frac{1}{2}$ , tandis que c'est oscillant pour  $k = \frac{1}{2}$  et infiniment grand si  $k > \frac{1}{2}$ . Il ne reste plus qu'à étudier la portion d'intégrale (8) prise dans un intervalle  $(-1, -1 + \varepsilon)$  ou  $(1 - \varepsilon, 1)$ ;  $f(x)$  y étant à variation bornée, l'évaluation d'une telle intégrale mise sous la forme au dernier membre de (8) se fait par le théorème de Bonnet, qui donne ainsi

$$(10) \quad \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{P'_n(x') + P'_{n+1}(x')}{2} f(x') dx' \\ = \frac{f(-1+0) - f(-1+\varepsilon)}{2} [P_n(-1+\varepsilon') + P_{n+1}(-1+\varepsilon')] \\ + \frac{f(-1+\varepsilon)}{2} [P_n(-1+\varepsilon) + P_{n+1}(-1+\varepsilon)],$$

$$(11) \quad \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{P'_n(x') + P'_{n+1}(x')}{2} f(x') dx' \\ = f(1-0) + \frac{f(1-\varepsilon) - f(1-0)}{2} [P_n(1-\varepsilon'') + P_{n+1}(1-\varepsilon'')] \\ - \frac{f(1-\varepsilon)}{2} [P_n(1-\varepsilon) + P_{n+1}(1-\varepsilon)],$$

où  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon'' < \varepsilon$ . Choisissons  $\varepsilon$  de façon que

$$|f(-1+0) - f(-1+\varepsilon)| < \eta, \quad |f(1-\varepsilon) - f(1-0)| < \eta;$$

les facteurs de ces quantités sont majorés par 1, quel que soit  $n$ , tandis

que le dernier crochet dans chaque second membre est  $O\left(\frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}}\right)$ . La somme de (10) et (11) diffère donc aussi peu que l'on veut de  $f(1-0)$  pourvu que  $\varepsilon$  et  $\frac{1}{n}$  soient assez petits, ce qui démontre la proposition de Hobson.

42. Lorsque  $f(x)$  est sommable dans  $(-1, 1)$ , sans qu'il en soit de même pour  $f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , sa série de Legendre est encore sommable au sens d'Euler-Poisson, et même au sens de Cesaro pourvu que l'ordre de sommabilité surpasse  $\frac{1}{2}$ , en tout point intérieur de discontinuité de première espèce. Il suffit de le démontrer pour la sommabilité la plus restrictive, savoir [6, b] :

**THÉORÈME.** —  *$f(x)$  étant sommable dans  $(-1, 1)$ , sa série de Legendre est sommable  $(C, r)$   $\left(\frac{1}{2} < r\right)$  et a pour somme  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  en tout point  $x$  de discontinuité de première espèce intérieur. La convergence est uniforme dans tout ensemble fermé intérieur où la convergence de  $f(x)$  vers ses limites est uniforme.*

Il résulte de (1) que la  $(n+1)^{\text{ième}}$  somme partielle  $(C, r)$  de la série  $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m P_m(x)$  est

$$S_n(x) = \int_{-1}^1 S_n(x', x) f(x) dx' = \int_0^\pi S_n(\cos \theta', x) f(\cos \theta') \sin \theta' d\theta',$$

où  $S_n(x', x)$  est la  $(n+1)^{\text{ième}}$  somme partielle  $(C, r)$  de

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} P_m(x) P_m(x').$$

Grâce à (5, IV), cette série, où l'on pose  $x = \cos \theta$ ,  $x' = \cos \theta'$ , s'écrit

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \int_{-\pi}^{\pi} P_m(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi') d\varphi',$$

donc, si  $\psi$  désigne l'arc de grand cercle de la sphère unité  $\sigma_0$ , joignant  $M(\theta, 0)$  à  $M'(\theta', \varphi')$ , on a

$$(12) \quad S_n(x) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\sigma_0} T_n(\psi) f(\cos \theta') dS,$$

$T_n(\psi)$  désignant la  $(n+1)^{\text{ème}}$  somme partielle (C,  $r$ ) de

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \psi).$$

$T_n(\psi)$  est le coefficient de  $h^n$  dans

$$\frac{(1-h)^{-r-1}}{\binom{n+r}{r}} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \psi) h^m = \frac{(1-h)^{-r-1}}{\binom{n+r}{r}} \frac{1-h^2}{(1-2h \cos \psi + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où la somme de la série est évaluée aisément à l'aide de (3, I) et de la dérivée de cette égalité par rapport à  $h$ . Cette somme est le produit de

$(1-2h \cos \psi + h^2)^{-\frac{1}{2}}$  par  $(1-h) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} h^m$ , de sorte que l'on a

$$(13) \quad T_n(\psi) = \sum_{m=0}^n T_{n,m}(\psi) P_{n-m}(\cos \psi),$$

avec

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_{n,m}(\psi) h^m = \frac{(1-h)^{-r}}{\binom{n+r}{r}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} h^m.$$

Par conséquent,

$$T_{n,m}(\psi) = \mathcal{A} \left\{ \frac{1}{\binom{n+r}{r}} \frac{e^{i\left(m + \frac{1}{2}\right)\psi}}{i \sin \frac{\psi}{2}} \sum_{\nu=0}^m \binom{r+\nu-1}{\nu} e^{-i\nu\psi} \right\}.$$

Cette dernière somme est la  $(m+1)^{\text{ème}}$  somme partielle du développement de  $(1-e^{-i\psi})^{-r}$ , dont le coefficient général  $b_\nu$  est positif et non croissant lorsque  $r \leq 1$ ; en désignant par C une constante convenable, sans que ce soit nécessairement la même dans les relations successives où cette lettre apparaîtra, on a en

outre  $b_\nu < C(\nu + 1)^{r-1}$ . La formule sommatoire d'Abel fournit l'inégalité

$$\left| \sum_{\nu=p}^q b_\nu e^{-i\nu\psi} \right| \leq \frac{2b_p}{|1 - e^{-i\psi}|},$$

donc

$$(14) \quad \left| \sum_{\nu=0}^m \binom{r+\nu-1}{\nu} e^{-i\nu\psi} \right| \leq \frac{1}{|1 - e^{-i\psi}|^r} + \frac{2b_{m+1}}{|1 - e^{-i\psi}|} < \frac{C}{|1 - e^{-i\psi}|^r},$$

quel que soit  $\psi > 0$  pour  $r = 1$  et pourvu que  $|1 - e^{-i\psi}| > \frac{1}{m+1}$  si  $r < 1$ ; d'ailleurs, dans le cas contraire, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=0}^m b_\nu e^{-i\nu\psi} \right| &\leq b_0 + b_1 + \dots + b_m < C \left( 1 + \frac{1}{2^{1-r}} + \dots + \frac{1}{(m+1)^{1-r}} \right) \\ &< C(m+1)^r < \frac{C}{|1 - e^{-i\psi}|^r}, \end{aligned}$$

donc (14) est général; et l'on en déduit immédiatement

$$(15) \quad |T_{n,m}(\psi)| < \frac{C}{(n+1)^r \sin^{r+1} \frac{\psi}{2}} \quad (0 < \psi \leq \pi).$$

Pour l'intervalle fermé  $0 \leq \psi \leq \pi$ , observons que  $T_{n,m}(\psi)$  est majoré, en vertu de sa définition, par

$$T_{n,m}(0) = \frac{2m+r+1}{r+1} \times \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{(r+n)(r+n-1)\dots(r+m+1)} \leq 2m+1,$$

de sorte que, si l'on partage l'intervalle  $(0, \psi)$  en trois parties  $(0, \varepsilon)$ ,  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  et  $(\pi - \varepsilon, \pi)$ , on pourra y utiliser l'une ou l'autre des inégalités

$$(16) \quad |T_n(\psi)| < C \frac{(n+1)^{-r}}{\sin^{r+1} \frac{\psi}{2} \sqrt{\sin \psi}} \left[ 1 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-m}} \right] < \frac{C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}}}{\sin^{r+1} \frac{\psi}{2} \sqrt{\sin \psi}} \quad (0 < \psi < \pi),$$

$$(17) \quad |T_n(\psi)| < \frac{C(n+1)^{-r}}{\sin^{r+1} \frac{\psi}{2}} [1 + 1 + \dots + 1] < C(n+1)^{1-r} \quad (\pi - \varepsilon \leq \psi \leq \pi),$$

$$(18) \quad |T_n(\psi)| < 1 + 3 + \dots + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad (0 \leq \psi \leq \pi).$$

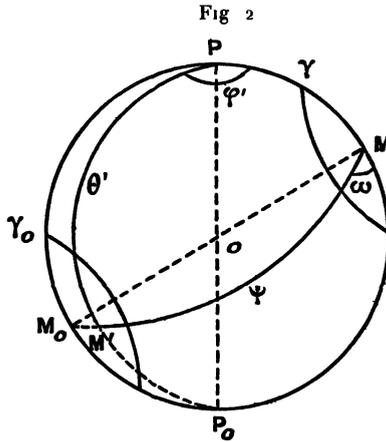
Au second intervalle  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  correspond, sur  $\sigma_0$ , une zone de pôles

$M(\theta, o)$  et  $M_0(\theta + \pi, \pi)$ . sur laquelle (16) est utilisable et permet de majorer la portion correspondante de (12) par

$$\begin{aligned} & C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos \theta')| \sin \psi \, d\psi \, d\omega}{\sin^{r+1} \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\sin \varepsilon}} \\ & < \frac{C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{r+\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos \theta)| \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi' \\ & < \frac{C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{r+\frac{3}{2}}} \int_{-1}^1 |f(x')| \, dx' < \frac{C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{r+\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

cette valeur majorante est inférieure à  $\frac{\eta}{\varepsilon}$ , quel que soit le nombre  $\eta > 0$ , pourvu que  $n^{r-\frac{1}{2}} \varepsilon^{r+\frac{3}{2}} > \frac{k}{\eta}$ , ou  $k$  désigne un nombre déterminé.

A l'intervalle  $(\pi - \varepsilon, \pi)$  correspond un cercle  $\gamma_0$  de centre  $M_0$  et de rayon géodésique  $\varepsilon$ . Grâce à une valeur intermédiaire  $\pi - \varepsilon'$ , on peut



majorer la portion correspondante de (12) à l'aide de (16) et (17), ce qui donne l'expression majorante

$$\begin{aligned} (19) \quad & C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon'} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos \theta')| \sin \psi \, d\psi \, d\omega}{\sqrt{\sin \psi}} \\ & + C(n+1)^{1-r} \int_{\pi-\varepsilon'}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos \theta')| \sin \psi \, d\psi \, d\omega. \end{aligned}$$

On voit que, dans  $\gamma_0$ ,  $\varphi'$  varie de  $\pi - \beta$  à  $\pi + \beta$ , avec  $\sin \beta = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \theta}$ ; donc, si  $\sin \beta' = \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \theta'}$ , la deuxième intégrale dans (19) est majorée par

$$\int_{\pi-0-\varepsilon'}^{\pi-0+\varepsilon'} \int_{\pi-\beta'}^{\pi+\beta'} |f(\cos \theta')| \sin \theta' d\theta' d\varphi' < \frac{C\varepsilon'}{\sqrt{\sin \theta}} \int_{-1}^1 |f(x')| dx' < \frac{C\varepsilon'}{\sin \theta}.$$

D'autre part, la relation

$$\cos(\pi - \psi) = \cos(\pi - \theta) \cos \theta' + \sin(\pi - \theta) \sin \theta' \cos(\pi - \varphi')$$

dans le triangle sphérique  $PM_0M'$  s'écrit

$$\sin^2 \frac{\pi - \psi}{2} = \sin^2 \frac{\pi - \theta - \theta'}{2} + \sin(\pi - \theta) \sin \theta' \sin^2 \frac{\pi - \varphi'}{2},$$

et entraîne l'équivalence

$$(\pi - \psi)^2 \sim (\pi - \theta - \theta')^2 + (\pi - \varphi')^2 \sin^2 \theta$$

dans la zone  $\pi - \varepsilon \leq \psi \leq \pi - \varepsilon'$ . On peut ainsi majorer la première intégrale dans (19) par

$$C \int_{\pi-\theta-\varepsilon}^{\pi-\theta+\varepsilon} \int_{\pi-\beta}^{\pi+\beta} \frac{|f(\cos \theta')| \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{\sin \theta} \sqrt{|\pi - \varphi'|}} < \frac{C\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin \theta}} \int_{-1}^1 |f(x')| dx' < \frac{C\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sin \theta},$$

et enfin la somme (19) par

$$\frac{C}{\sin \theta} \left[ (n+1)^{-r+\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{1-r\varepsilon'} \right].$$

$\varepsilon'$  étant arbitrairement petit, l'intégrale (12) prise sur  $\gamma_0$  est donc majorée par  $\frac{C}{\sin \theta} (n+1)^{-r+\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  et devient plus petite que  $\frac{\eta}{2}$  pourvu que  $n^{r-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} > \frac{k_1}{\eta}$ , où  $k_1$  est un nombre donné pour tout intervalle de variation de  $\theta$  intérieur à  $(0, \pi)$ . On a ainsi démontré que, si  $\gamma$  désigne le cercle  $0 \leq \psi \leq \varepsilon$  de centre M,

$$(20) \quad \left| S_n(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \int_{\gamma} T_n(\psi) f(\cos \theta') dS \right| < \eta,$$

pourvu que  $n^{r-\frac{1}{2}} > \frac{k}{\eta} \varepsilon^{-r-\frac{3}{2}}$  et  $\frac{k_1}{\eta} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ .

Supposons maintenant que  $x$  soit une discontinuité de première

espèce; le parallèle  $\theta' = \theta$  partage  $\gamma$  en deux parties  $\gamma_1, \gamma_2$ , et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \int \int_{\gamma} T_n(\psi) f(\cos \theta') dS \\
 & = f(\cos \theta - 0) \int \int_{\gamma_1} T_n(\psi) dS + f(\cos \theta + 0) \int \int_{\gamma_2} T_n(\psi) dS \\
 & \quad + \int \int_{\gamma_1} T_n(\psi) [f(\cos \theta') - f(\cos \theta - 0)] dS \\
 & \quad + \int \int_{\gamma_2} T_n(\psi) [f(\cos \theta') - f(\cos \theta + 0)] dS,
 \end{aligned}$$

où les deux crochets sont infiniment petits avec  $\varepsilon$ . D'autre part, si  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ . (16) et (18) donnent

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \int_0^{\varepsilon} |T_n(\psi)| \sin \psi d\psi \\
 & < (n+1)^2 \int_0^{\varepsilon'} \sin \psi d\psi + C(n+1)^{-r+\frac{1}{2}} \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{\sin \psi} d\psi}{\sin^{r+1} \frac{\psi}{2}} \\
 & < C \left\{ (n+1)^2 \varepsilon'^2 + [(n+1)\varepsilon']^{-r+\frac{1}{2}} \right\} < C
 \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon' = \frac{1}{n+1}$ , ce qui est possible si  $r > \frac{1}{2}$ , car les inégalités précédemment trouvées permettent de prendre  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Dans ces conditions, (21) entraîne

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \left| \int \int_{\gamma} T_n(\psi) f(\cos \theta') dS - f(\cos \theta - 0) \int \int_{\gamma_1} T_n(\psi) dS \right. \\
 & \quad \left. - f(\cos \theta + 0) \int \int_{\gamma_2} T_n(\psi) dS \right| < \eta
 \end{aligned}$$

pourvu que  $\varepsilon$  soit inférieur à un nombre convenable, le même pour tout ensemble fermé de points, intérieur à  $(-1, 1)$ , sur lequel  $f(x)$  converge uniformément vers ses limites  $f(x \pm 0)$ . On voit de même que  $\int_0^{\varepsilon} \int_{\gamma}^{\mu} |T_n(\psi)| \sin \psi d\psi d\omega < C(\mu - \lambda)$  et converge uniformément vers zéro avec  $\mu - \lambda$ .

Ceci posé, le grand cercle, tangent en M au parallèle  $\theta' = \theta$ , partage  $\gamma$  en deux moitiés  $\gamma'_1, \gamma'_2$  qu'on peut substituer à  $\gamma_1, \gamma_2$  dans (23) avec une nouvelle erreur majorée par  $\eta$  grâce à la dernière remarque;

les deux intégrales correspondantes sont alors égales, et il vient ainsi

$$\left| S_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{8\pi} \int \int_{\gamma} T_n(\psi) dS \right| < 3\eta.$$

En utilisant l'inégalité (20) relative à  $f(x) = 1$ , pour laquelle  $S_n(x) = 1$ , on en déduit tout de suite

$$\left| S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| < C\eta$$

pourvu que  $\varepsilon$  et  $\frac{1}{n}$  soient suffisamment petits, avec la circonstance d'uniformité énoncée.

43. Ce n'est qu'en ce qui concerne  $\gamma$  et  $\gamma_0$  que le raisonnement précédent exige d'être modifié aux extrémités. Pour  $\gamma$ , il ne s'agit même que d'une simplification évidente, du fait que l'existence d'une seule limite  $f(\pm 1 \mp 0)$  au point  $\pm 1$  permet un raisonnement global sur ce cercle. Pour  $\gamma_0$ , c'est la majoration des deux termes de (19) qui doit être modifiée. Par exemple, si  $\theta = 0$ , il vient  $\psi = \theta'$ ,  $\omega = \varphi'$ , et le deuxième terme est majoré par

$$C(n+1)^{1-r} \int_{\pi-\varepsilon'}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\cos \theta')| \sin \theta' d\theta' d\varphi' < C(n+1)^{1-r} \int_{-1}^{-\cos \varepsilon'} |f(x')| dx',$$

tandis que l'autre l'est par

$$\begin{aligned} & \frac{C}{(n+1)^{r-\frac{1}{2}}} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon'} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos \theta')| \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{\sin \theta'}} \\ & < \frac{C}{(n+1)^{r-\frac{1}{2}}} \int_{-\cos \varepsilon'}^{-\cos \varepsilon} \frac{|f(x')| dx'}{(1+x')^{\frac{1}{4}}} < \frac{C}{(n+1)^{r-\frac{1}{2}}} \int_{-\cos \varepsilon'}^{-1} \frac{|f(x')| dx'}{(1+x')^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

En posant

$$\int_{-1}^{-\cos \varepsilon} |f(x')| dx' = H(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \int_{-\cos \varepsilon}^{-1} |f(x')| (1+x')^{-\frac{1}{4}} dx' = K(\varepsilon),$$

$H(\varepsilon)$  est décroissant et infiniment petit quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, et (19) est majoré par

$$C \left[ (n+1)^{1-r} H(\varepsilon') + (n+1)^{-r+\frac{1}{2}} K(\varepsilon') \right].$$

Par conséquent, (20) subsiste si l'on peut déterminer  $\varepsilon$ ,  $n$  et  $\varepsilon' < \varepsilon$  de

façon que soient satisfaites des inégalités de la forme

$$n^{r-\frac{1}{2}} > \frac{k_1}{\eta} \varepsilon^{-r-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{k_1}{\eta} K(\varepsilon'), \quad n^{1-r} < \frac{k_2 \eta}{H(\varepsilon')};$$

il suffit que  $\varepsilon, \varepsilon'$  soient tels que

$$H(\varepsilon') < k_3 \eta^{\frac{1}{2r-1}} \varepsilon^{\frac{(2r+1)(1-r)}{2r-1}}, \quad K(\varepsilon') < k_4 \eta^{\frac{1}{2-2r}} H(\varepsilon')^{\frac{1-2r}{2-2r}},$$

où  $k_3, k_4$  sont des constantes déterminées. La première de ces inégalités est vérifiée pourvu que  $\varepsilon'$  soit assez petit, et il en est de même de l'autre pourvu que  $K(\varepsilon')$  soit infiniment petit par rapport à  $H(\varepsilon')^{\frac{1-2r}{2-2r}}$ . C'est la seule condition supplémentaire pour  $x = 1$ , avec une condition analogue pour l'autre extrémité. Elle est remplie pour  $r = 1$ , sans autre hypothèse sur  $f(x)$ . Pour  $r < 1$ , elle l'est, en particulier, si  $f(x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}$  est sommable au voisinage de  $x = -1$  et, *a fortiori*, si  $f(-1+0)$  existe. On a ainsi démontré :

**THÉORÈME.** —  *$f(x)$  étant sommable dans  $(-1, 1)$ , sa série de Legendre est sommable  $(C, 1)$  et a pour somme  $f(\pm 1 \mp 0)$  au point  $\pm 1$  si la limite correspondante existe. Elle y est également sommable  $(C, r)$   $\left(\frac{1}{2} < r < 1\right)$ , avec la même somme, si*

$$\int_{\mp 1 \pm \varepsilon}^{\pm 1} |f(x)| (1 \pm x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

*est infiniment petit par rapport à la puissance  $\frac{1-2r}{2-2r}$  de*

$$\int_{\mp 1}^{\mp 1 \pm \varepsilon} |f(x)| dx,$$

*lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.*

44. De la convergence  $(C, 1)$ , on déduit la convergence simple de la série toutes les fois que  $\lambda_m = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$ , grâce au théorème classique de Hardy-Littlewood. D'une manière générale, on trouvera, dans les Mémoires [49; 50], l'étude de la convergence de  $\Sigma \lambda_m P_m(x)$  en fonction de l'ordre de grandeur des coefficients, et les travaux principaux concernant la sommabilité au sens de Poisson ou de Cesaro ( $r \leq 1$ ) aux numéros [6; 11; 15; 16; 19, *c, d*; 20, *h*; 23; 28; 36; 45];

## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

- 
1. ADAMS. — *Proceedings of the Royal Society*, t. 27, 1878, p. 63.
  2. BARNES (E. W.). — On generalized Legendre Functions (*Quarterly Journal of Math.*, t. 39, 1908, p. 97).
  3. BOLANATH PAL. — *Bulletin of the Calcutta Math. Society*; a. t. 9, 1917-1918, p. 85; b. t. 10, 1918-1919, p. 187.
  4. BONNET. — *Journal de Liouville*, t. 17, 1852, p. 252.
  5. BURKHARD, *Münchener Sitzungsberichte*, t. 39, 1909, n° 10.
  6. CHAPMANN. — a. *Quarterly Journal of Math.*, t. 34, 1911, p. 1; b. *Math. Annalen*, t. 72, 1912, p. 211.
  7. CHRISTOFFEL. — *Journal de Crelle*, t. 55, 1858.
  8. DARBOUX. — *C. R. Acad. Sc.*, t. 82, 1876; a. p. 365; b. p. 404; c. *Journal de Liouville*, t. 4, 1878.
  9. DINI. — *Annali di Matematica*, 2° série, t. 6, 1874.
  10. DIRICHLET. — *Journal de Crelle*, t. 17, 1837, p. 35.
  11. FÉJER. — a. *C. R. Acad. Sc.*, t. 146, 1908, p. 224; b. *Math. Annalen*, t. 67, 1909, p. 76; c. *Rendic. del Cir. Mat. di Palermo*, t. 38, 1914, p. 79; d. *Math. Zeitschrifte*, t. 24, 1925, p. 267.
  12. FERRERS. — *Spherical Harmonics*, 1878.
  13. FROBENIUS. — *Journal für Math.*, t. 73, 1871, p. 16.
  14. GAUSS. — *Werke*, t. 3, p. 165-206.
  15. GRONWALL. — *Math. Annalen* : a. t. 74, 1913, p. 213; b. t. 75, 1914, p. 321.
  16. HAAR. — a. *Rendic. del Cir. Mat. di Palermo*, t. 32, 1911, p. 132; b. *Math. Annalen*, t. 49, 1919.
  17. HEINE. — a. *Handbuch der Kugelfunctionen*, Berlin, 1878; b. *Journal für Math.*, t. 42, 1851, p. 72.
  18. HERMITE. — *Journal für Math.*, t. 107, 1891, p. 80.
  19. HILLE. — *Arkiv för Math.* : a. t. 13, n° 17, 1918-1919; b. t. 17, n° 22, 1922-1923; *Math. Zeitschrifte* : c. t. 5, 1919, p. 17; d. t. 8, 1920, p. 79.
  20. HOBSON. — a. On a type of spherical Harmonics of unrestricted degree, order, and argument (*Philosophical Transactions of the Royal Soc.*, 187 A, 1896, p. 443; *Proceedings of the London Math. Soc.* : b. t. 22, 1891, p. 431; c. t. 6, 1908, p. 349; d. t. 7, 1909, p. 24; e. t. 29, 1928, p. 355; f. t. 30, 1929, p. 239; g. *ibid.*, p. 373. h. *The theory of spherical and ellipsoidals Harmonics*, Cambridge, 1931.
  21. JACOBI. — *Journal de Crelle* : a. t. 2, 1827, p. 226; b. t. 26, 1843, p. 81; c. *Journal für Math.*, t. 32, 1846, p. 8.
  22. JOLLIFFE. — *Messenger of Math.*, t. 43, 1913, p. 85.
  23. KOGEBLIANTZ. — *Math. Zeitschrifte*, t. 14, 1922.

24. LAGRANGE (R.). — *a. Journal de Math.*, t. 6, 1927, p. 165; *b. Acta Math.*, t. 56, 1930, p. 205; *C. R. Acad. Sc.* : c. t. 202, 1936, p. 1897; d. t. 203, 1936, p. 915 et 1225.
25. LAURENT. — *Journal de Liouville*, t. 1, 1875, p. 373.
26. LAPLACE. — *Mécanique céleste*, Livre XI.
27. LEGENDRE. — *a. Mémoires de Math. et de Phys. présentés à l'Acad. royale des Sc. par divers savants*, t. 10, 1785, p. 411; *Mémoires de Math. et de Phys. tirés des registres de l'Acad. royale des Sc.* : b. 1784; c. 1787; d. *Histoire de l'Acad. Sc. de Paris*, t. 2, 1789; e. *Calcul intégral*, Paris, 1817.
28. LUKACS. — *Math. Sitzungsberichte*, t. 14, 1922, p. 250.
29. MACDONALD. — *Proceedings of the London Math. Soc.* : a. t. 31, 1900, p. 264; b. t. 34, 1902, p. 52.
30. MEHLER. — *Math. Annalen*, t. 5, 1872, p. 141.
31. MURPHY. — *Treatise on Electricity*, 1833.
32. NEUMANN (C.). — *a. Ueber die Entwicklung einer Function nach den Kugelfunctionen*, Halle, 1862; *b. Leipziger Abh.*, 1886.
33. NEUMANN (F. E.). — *a. Journal für Math.*, t. 37, 1848, p. 24; *b. Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*, Leipzig, 1878.
34. NIELSEN (N.). — *Théorie des fonctions métasphériques*, Paris, 1911.
35. OLBRICHT. — *a. Studien ueber die Kugel und Cylinder-functionen*, Halle, 1887; *b. Nova Acta Acad. Leop.*, t. 52, 1888, p. 1.
36. PLANCHEREL. — *Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*, t. 33, 1912, p. 41.
37. POISSON. — *a. Journal de l'École Polytechnique*, t. 12, cahier 19, 1823, p. 404; addition à la *Connaissance des Temps* : b. 1829; c. 1831; d. *Théorie analytique de la chaleur*.
38. RALEIGH (Lord). — *Philosophical Transactions of the Royal Soc.*, t. 160, 1870, p. 569.
39. RODRIGUES. — *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. 3, 1814-1816, p. 361.
40. SCHLÄFLI. — *Ueber die zwei Heineschen Kugelfunctionen*, Berne, 1881.
41. SCHMIDT. — *Schlömilch's Zeitschrift*, t. 44, 1889, p. 327.
42. STIELJÈS. — *a. Annales Fac. Sc. Toulouse*, t. 4, 1890; *b. Corresp. d'Hermite et de Stieljès*, Paris, 1905.
43. THOMÉ. — *Journal für Math.*, t. 46, 1866, p. 337.
44. TODHUNTER. — *Functions of Laplace, Lamé and Bessel*, Cambridge, 1875.
45. VOLK. — *München Sitzungsberichte*, 1921, p. 267.
46. WATSON. — *Transactions of the Cambridge Phil. Soc.*, t. 22, 1918, p. 290.
47. WHIPPLE. — *Proceedings of the London Math. Soc.*, t. 16, 1917, p. 301.
48. WHITTAKER and WATSON. — *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1920.
49. WILSON. — *Proceedings of the London Math. Soc.*, t. 21, 1923, p. 389.
50. YOUNG. — *Proceedings of the London Math. Soc.*, t. 18, 1919, p. 141.

---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

	Pages.
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I. — Polynomes de Legendre.....	3
CHAP. II. — Fonctions de Legendre.....	13
CHAP. III. — Les fonctions de Legendre généralisées.....	26
CHAP. IV. — Théorèmes d'addition.....	54
CHAP. V. — Expressions asymptotiques de $P_n^m(\cos \theta)$ et $Q_n^m(\cos \theta)$ .....	61
CHAP. VI. — Séries de Legendre.....	66
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	81

