MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

A. BLAQUIÈRE
G. LEITMANN

Jeux quantitatifs

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 168 (1969)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1969__168__R5_0>

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 5111

A. BLAQUIERE
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

G. LEITMANN
Professeur à l'Université de Californie, Berkeley

JEUX QUANTITATIFS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLXVIII

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
55, quai des Grands-Augustins, 75-PARIS 06
1969

DOMAINE UNIVERSITAIRE - 38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

© Gauthier-Villars, 1969.
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés y compris la photographie et le microfilm, réservés pour tous pays.

PRÉFACE

Dans ce livre nous étudierons une classe de jeux à deux joueurs, à somme nulle, appelés *jeux quantitatifs*. Dans le chapitre I nous considérerons des jeux dont l'évolution de l'état est régie par un système d'équations différentielles ordinaires, d'où le nom *jeux différentiels*. Dans le chapitre II nous nous intéresserons à des *jeux multiétages*, c'est-à-dire à des jeux dont l'évolution de l'état est régie par un système d'équations aux différences.

Dans les deux cas les équations qui régissent l'évolution de l'état au cours d'une partie contiennent deux ensembles de paramètres, appelés paramètres de commande, dont les valeurs sont déterminées, pour chaque position de l'état, par deux fonctions de l'état appelées stratégies. Le jeu est déterministe en ce sens que chaque stratégie est choisie par l'un des joueurs au début d'une partie et que l'évolution de la partie s'en déduit, pour chaque état initial donné. Comme chaque joueur connaît l'état du jeu à chaque instant, ce qui lui permet d'adapter sa commande au choix initial, le jeu est dit « à information complète ». La partie se termine lorsque l'état du jeu atteint un ensemble de points donné, appelé cible. Elle est alors dite partie complète.

Une fonctionnelle donnée associe à toute partie complète un nombre réel unique appelé coût de la partie. L'un des joueurs a pour objectif de rendre ce coût minimal, tandis que le partenaire a pour objectif de le rendre maximal. C'est en ce sens que l'on peut dire que chacun des joueurs s'efforce de jouer optimalement, le résultat optimal étant le meilleur compromis.

Les premiers travaux portant sur les jeux différentiels sont dus à Isaacs, et les nombreux résultats qu'il a obtenus dans ce domaine sont rassemblés dans son livre *Differential Games* [15]. L'utilisation

d'un « principe d'optimalité » le conduit à une équation aux dérivées partielles dont la solution fournit la valeur du jeu, c'est-à-dire le coût d'une partie optimale, en fonction de l'état initial. La méthode suivie par Isaacs est partiellement analytique et partiellement géométrique. Sa théorie est sujette à des hypothèses *a priori* relatives à la valeur du jeu.

D'autres travaux, dus à Berkovitz ([16]-[18]), reposent sur l'utilisation du calcul des variations. Cependant, pour rendre la théorie plus rigoureuse, Berkovitz est conduit à considérer une classe de jeux plus restreinte que celle étudiée par Isaacs.

Dans la référence [28], Leitmann et Mon ont abordé le problème d'un point de vue différent, en appliquant à l'étude d'une classe restreinte de jeux différentiels une méthode géométrique précédemment développée par Blaquière et Leitmann ([1]-[6]) dans leur théorie des processus optimaux. Il est apparu que cette méthode pouvait être plus complètement approfondie, généralisée, et conduire à des résultats dont certains font l'objet de la présente publication.

A. Blaquière,

G. Leitmann.

JEUX QUANTITATIFS

Par A. BLAQUIÈRE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

et G. LEITMANN,
Professeur à l'Université de Californie, Berkeley.

INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Les symboles mathématiques utilisés auront leur signification habituelle, sauf dans des cas particuliers où leur signification sera spécifiée. Le sens des termes nouveaux sera donné lors de leur introduction.

On considérera un ensemble de q réels comme un vecteur de l'espace euclidien à q dimensions E^q, de base orthonormée. On représentera un vecteur par une minuscule, ses coordonnées seront spécifiées par des indices inférieurs. On particularisera les vecteurs et les scalaires par des indices supérieurs. Si un vecteur multiplie une matrice à gauche, on considérera le vecteur comme une matrice ligne; si un vecteur multiplie une matrice à droite, on considérera le vecteur comme une matrice-colonne. Le produit scalaire de deux vecteurs a et b sera représenté par $a.b = \sum_{i=1}^{q} a_i b_i$, la norme euclidienne d'un vecteur a par $\| a \|$, une matrice par une lettre majuscule ou par un symbole de dérivée partielle approprié.

Un domaine est un sous-ensemble ouvert connexe de l'espace considéré. Une fonction numérique scalaire définie sur un domaine est de classe C^k si cette fonction et ses k premières dérivées partielles sont continues sur ce domaine. De même une fonction numérique vectorielle est de classe C^k si chacune de ses composantes est de classe C^k.

CHAPITRE I.

JEUX DIFFÉRENTIELS QUANTITATIFS.

1.1. Formulation du jeu, théorème fondamental.

1.1.1. ÉQUATIONS D'ÉTAT ET STRATÉGIES.

Nous considérerons un *système dynamique*, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'univers défini par son *état*, ensemble de n nombres réels $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in G\subseteq E^n$, qui évolue au cours du temps. Nous nous intéresserons plus particulièrement à des systèmes dont le comportement dynamique est régi par n équations différentielles ordinaires, les *équations d'état*

$$\frac{dx_\nu}{dt}=f_\nu(x, u, v) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où

$$u=(u_1\ u_2, \ldots, u_r)\in U\subseteq E^r \qquad \text{et} \qquad v=(v_1, v_2, \ldots, v_q)\in V\subseteq E^q$$

sont les *variables de commande.*

Nous conviendrons dans la suite de poser $x_n\equiv t$, de telle sorte que $f_n(x, u, v)\equiv 1$, et nous supposerons d'ailleurs que G, U, V, sont des ouverts de E^n, E^r et E^q, respectivement.

Nous supposerons de plus que les fonctions f_ν sont de classe C^2 sur $G\times U\times V$.

Les joueurs seront au nombre de deux. Nous les désignerons par J_P et J_E.

Les valeurs des variables de commande u et v seront déterminées à chaque instant par des fonctions de x, $p: x\to p(x)$ et $e: x\to e(x)$, respectivement, définies sur un sous-ensemble X de G. Nous supposerons dans la suite que X est un domaine. Ces fonctions p et e, appelées *stratégies*, sont choisies par J_P et J_E respectivement dans des ensembles de fonctions donnés. Ces ensembles de stratégies seront désignés respectivement par $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}_E$. Nous supposerons que les ensembles $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}_E$ jouissent de la propriété suivante :

(i) Quelles que soient p', $p''\in\mathcal{S}_P$ et e', $e''\in\mathcal{S}_E$, et quel que soit $x^l\in X$, les fonctions $p''': x\to p'''(x)$ et $e''': x\to e'''(x)$, $x\in X$, où

$$\left.\begin{aligned} p'''(x)&=p'(x)\\ e'''(x)&=e'(x)\end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x_n\leqq x_n^l$$

$$\left.\begin{aligned} p'''(x)&=p''(x)\\ e'''(x)&=e''(x)\end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x_n> x_n^l$$

sont des stratégies, c'est-à-dire que $p''' \in \mathcal{S}_P$ et $e''' \in \mathcal{S}_E$.

(ii)
$$p(x) \in K_u(x) \subseteq U$$
$$e(x) \in K_v(x) \subseteq V$$

pour tout $x \in X$.

$K_u(x)$ et $K_v(x)$ sont appelés *ensembles de contraintes*, ils peuvent dépendre de x.

Nous appellerons *couple stratégique admissible* (1) tout couple (p, e) tel que $p \in \mathcal{S}_P$ et $e \in \mathcal{S}_E$.

Un couple stratégique admissible (p, e) étant donné, nous conviendrons de remplacer le système (1) par le suivant :

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, p(x), e(x)), \qquad \text{avec } f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Nous dirons que la fonction $\tilde{x} : t \to x = \tilde{x}(t)$, définie sur $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, est solution de l'équation (1) pour $u = p(x)$ et $v = e(x)$, ou de l'équation (2), si $\tilde{x}$ est continue sur $[t_0, t_1]$ et

$$(a) \qquad \tilde{x}(t) \in X \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1)$$

et

$$(b) \qquad \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(\tilde{x}(t)), p(\tilde{x}(t)), e(\tilde{x}(t))$$

est vérifiée presque partout sur $[t_0, t_1]$.

Soit alors $x^0 \in X$ un état initial donné au temps t_0. Si $\tilde{x} : t \to x = \tilde{x}(t)$ est une solution de (2) définie sur $[t_0, t_1]$, telle que $\tilde{x}(t_0) = x^0$, les valeurs des variables de commande au temps $t \in [t_0, t_1]$ *définies par le couple* (p, e) *et par cette solution* seront les valeurs des fonctions du temps :

$$\tilde{u} : \quad t \to u = \tilde{u}(t),$$
$$\tilde{v} : \quad t \to v = \tilde{v}(t),$$

au temps t, où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont définies sur $[t_0, t_1]$ et telles que

$$\tilde{u}(t) = p(\tilde{x}(t)),$$
$$\tilde{v}(t) = e(\tilde{x}(t)),$$

pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

Il peut exister plus d'une solution de l'équation (2) satisfaisant à la condition initiale donnée. Évidemment, si p et e sont de classe C^1 sur un voisinage de x^0 dans X, l'équation (2) a une solution et une seule satisfaisant à la condition initiale donnée, définie sur un intervalle Δt contenant t_0. Si, au contraire, x^0 est un point de discontinuité de p ou e, ou des deux fonctions p et e, l'équation (2) peut avoir plus d'une solution satisfaisant à la condition initiale donnée. De plus,

(1) ou plus simplement « couple stratégique ».

une solution unique dans un voisinage du point initial peut se raccorder à plusieurs solutions en un point de discontinuité de p ou e, ou des deux fonctions p et e. Enfin, l'équation (2) peut ne pas avoir de solution satisfaisant à la condition initiale donnée.

1.1.2. Partie, partie complète et couple stratégique jouable.

Soit θ^f un ensemble de points donné dans G, appelé *cible*. Nous supposerons que θ^f est une surface de dimension $n-1$, appartenant à la frontière de X, qui peut être représentée paramétriquement par

$$x = \chi^f(s),$$

où $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ prend ses valeurs sur un cube fermé $\mathcal{K}^f$ dans E^{n-1}.

Nous supposerons de plus que la fonction χ^f est de classe C^2 et que la matrice

$$\frac{\partial \chi^f}{\partial s} \triangleq \left[\frac{\partial \chi_i^f}{\partial s_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

a le rang maximal sur un domaine contenant $\mathcal{K}^f$.

Ces hypothèses impliquent que θ^f peut être définie par une équation unique

$$m^f(x) = 0,$$

où la fonction m^f est de classe C^2 et $\operatorname{grad} m^f(x) \neq 0$ sur un domaine contenant θ^f.

(p, e) étant un couple stratégique quelconque, nous appellerons *trajet dans* $X \cup \theta^f$ le graphe $\{(t, x) : x = \tilde{x}(t)\}$ d'une fonction $\tilde{x}$, solution de l'équation (2).

Nous dirons que *le trajet est engendré* par le couple stratégique (p, e).

Une *partie* est l'évolution de l'état le long d'un trajet.

Une *partie complète* est une partie dont l'état final appartient à θ^f. Le trajet correspondant est appelé *trajet complet*. Nous dirons que le couple stratégique (p, e) *engendre une partie complète* s'il engendre un trajet complet.

Nous dirons que (p, e) est un *couple stratégique jouable sur* X si :

(i) (p, e) est un couple stratégique; et

(ii) (p, e) engendre une partie complète, quel que soit l'état initial $x^0 \in X$.

Si nous désignons par $\tilde{x} : t \to \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, avec $\tilde{x}(t_0) = x^0$, $\tilde{x}(t_f) \in \theta^f$, une fonction dont le graphe est un trajet complet engendré par le couple stratégique (p, e) jouable sur X, à partir de l'état

initial $x^0 \in X$, il résulte des définitions d'un trajet et d'une solution de l'équation (2) que

$$\tilde{x}(t) \in X, \quad \forall t \in [t_0, t_f).$$

Dans la suite, la notation π désignera un trajet complet dans $X \cup \theta^f$, engendré par un couple stratégique jouable sur X à partir d'un point initial dans X.

1.1.3. Cout, optimalité et valeur du jeu.

Nous introduirons maintenant une fonctionnelle, c'est-à-dire une règle qui associe à toute partie complète un nombre réel unique appelé *coût* de la partie.

Soit $f_0 : (x, u, v) \to f_0(x, u, v)$ une fonction donnée, de classe C^2 sur $G \times U \times V$.

Nous ajouterons aux hypothèses (i) et (ii) du paragraphe 1.1.1 l'hypothèse suivante :

Si $p \in \mathcal{S}_P$, $e \in \mathcal{S}_E$, $x^0 \in X$ et si $\tilde{x} : t \to x = \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $\tilde{x}(t_0) = x^0$, est une solution de l'équation (2), alors l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\, dt$$

est définie.

Cette hypothèse nous permet de définir le coût d'une partie complète d'état initial $x_0 \in X$, représentée par $\tilde{x} : t \to \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, $\tilde{x}(t_0) = x^0$, $\tilde{x}(t_f) \in \theta^f$, engendrée par le couple stratégique (p, e) jouable sur X, par l'intégrale

$$V(x^0, \theta^f; p, e) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t))\, dt.$$

Nous poserons

$$V(x^0, \theta^f; p, e) = 0, \quad \forall x^0 \in \theta^f, \quad \forall p \in \mathcal{S}_P \quad \text{et} \quad \forall e \in \mathcal{S}_E.$$

Nous dirons qu'un couple stratégique (p^*, e^*) est *optimal sur* X si :

(i) (p^*, e^*) est un couple stratégique jouable sur X;

(ii) la condition du point en selle,

$$V(x^0, \theta^f; p^*, e) \leqq V(x^0, \theta^f; p^*, e^*) \leqq V(x^0, \theta^f; p, e^*) \tag{3}$$

est satisfaite pour tout $x^0 \in X$, pour tous les couples stratégiques (p^*, e) et (p, e^*) jouables sur X, et pour toutes les parties complètes engendrées par (p^*, e) et (p, e^*) à partir de x^0;

(iii) $V(x^0, \theta^f; p^*, e^*)$ est défini pour tout $x^0 \in X$.

Nous supposerons dans la suite qu'il existe un couple stratégique (p^*, e^*) optimal sur X et nous poserons

$$V^*(x^0) \stackrel{\Delta}{=} V(x^0, \theta^f; p^*, e^*).$$

Nous appellerons $V^*(x^0)$ *valeur du jeu* en x^0.

Un trajet complet dans $X \cup \theta^f$ engendré à partir de l'état initial $x^0 \in X$ par le couple stratégique optimal (p^*, e^*) sera appelé *trajet optimal*, et désigné par π^*.

Un trajet complet dans $X \cup \theta^f$ engendré à partir de l'état initial $x^0 \in X$ par un couplet stratégique (p^*, e) $[(p, e^*)]$ jouable sur X sera appelé *trajet* P-*optimal* [E-*optimal*] et désigné par $\pi_P[\pi_E]$.

1.1.4. Espace des états augmenté, trajets dans E^{n+1}.

Considérons maintenant les points

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x) \in E^{n+1},$$

où E^{n+1} est l'*espace des états augmenté*, et définissons un *trajet* $\Pi(C)$ *dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$, où $\mathbf{X} \stackrel{\Delta}{=} X \times \{x_0\}$ et $\Theta^f \stackrel{\Delta}{=} \theta^f \times \{x_0\}$, par

$$\Pi(C) \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} : x_0 + V(x, \theta^f; p, e) = C,\ x \in \pi\}, \tag{4}$$

où (p, e) est un couple stratégique jouable sur X qui engendre le trajet complet $\pi \subset X \cup \theta^f$, à partir du point initial $x^0 \in X$, et où C est une constante arbitraire.

Définissons de même un *trajet optimal dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ par

$$\Pi^*(C) \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} : x_0 + V(x, \theta^f; p^*, e^*) = C,\ x \in \pi^*\} \tag{5}$$

un *trajet* P-*optimal dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ par

$$\Pi_P(C) \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} : x_0 + V(x, \theta^f; p^*, e) = C,\ x \in \pi_P\}; \tag{6}$$

un *trajet* E-*optimal dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ par

$$\Pi_E(C) \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} : x_0 + V(x, \theta^f; p, e^*) = C,\ x \in \pi_E\}. \tag{7}$$

Quand C varie, les équations (4), (5), (6) et (7) définissent les familles de trajets $\{\Pi(C)\}$, $\{\Pi^*(C)\}$, $\{\Pi_P(C)\}$ et $\{\Pi_E(C)\}$, respectivement, dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$. Ces familles, chacune à un paramètre, appartiennent à des surfaces cylindriques de génératrices parallèles à l'axe x_0 dont les inter-

sections avec $\mathbf{X} \cup \theta^f$ sont les trajets π, π^*, π_P et π_E respectivement. Il est clair que les points terminaux des trajets $\Pi(C)$, $\Pi^*(C)$, $\Pi_P(C)$ et $\Pi_E(C)$ appartiennent au cylindre Θ^f.

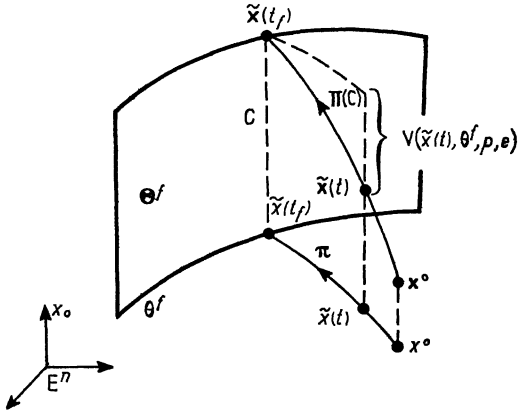

Fig. 1.1. — Trajet dans E^{n+1}.

Si le trajet $\Pi(C)$, pour une valeur donnée de la constante C, et le trajet π, sont représentés respectivement par $\tilde{\mathbf{x}} : t \to \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ et $\tilde{x} : t \to x = \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, nous avons

$$V(\tilde{x}(t), \theta^f; p, e) = \int_t^{t_f} f_0(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau))\, d\tau.$$

Il s'ensuit que $\tilde{\mathbf{x}}$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}, u, v), \tag{8}$$

où

$$u = p(\mathbf{x}), \qquad v = e(\mathbf{x})$$

et

$$F(\mathbf{x}, u, v) = (f_0(x, u, v), \ldots, f_{n-1}(x, u, v), 1).$$

Considérons maintenant des trajets, optimal, P-optimal et E-optimal dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$, partant du même point $\mathbf{x}^0$ au temps t_0.

Désignons par

$$\tilde{\mathbf{x}}^* : \quad t \to \tilde{\mathbf{x}}^*(t), \qquad t \in [t_0, t_f^*],$$
$$\tilde{\mathbf{x}}^P : \quad t \to \tilde{\mathbf{x}}^P(t), \qquad t \in [t_0, t_f^P],$$
$$\tilde{\mathbf{x}}^E : \quad t \to \tilde{\mathbf{x}}^E(t), \qquad t \in [t_0, t_f^E],$$

les solutions correspondantes de l'équation (8). La condition du point en selle (3) s'écrit

$$x_0^{\mathrm{P}}(t_f^{\mathrm{P}}) \leqq x_0^*(t_f^*) \leqq x_0^{\mathrm{E}}(t_f^{\mathrm{E}}). \tag{9}$$

1.1.5. Surfaces du jeu et surfaces isocoût optimales.

Puisque $V^*(x)$ est défini pour tout x appartenant à $X \cup \theta^f$, nous pouvons définir la *surface du jeu* $\Sigma(C)$ par

$$\Sigma(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x} : \Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\Delta}{=} x_0 + V^*(x) = C \}, \tag{10}$$

où C est une constante arbitraire.

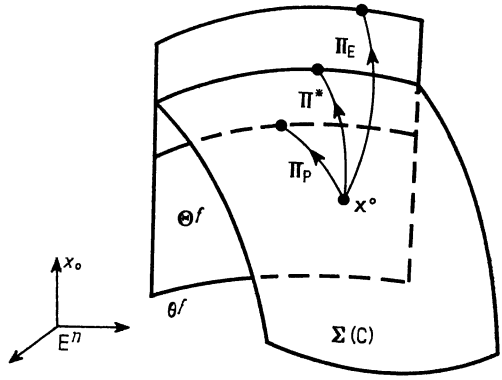

Fig. 1.2. — Surface du jeu et trajets dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$.

L'intersection de $\Sigma(C)$ avec $X \cup \theta^f$ sera appelée *surface isocoût optimale*. Elle est définie par

$$S(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ x : V^*(x) = C \}.$$

Une telle surface est le lieu des états initiaux pour lesquels le jeu a la même valeur C.

De même que pour les trajets dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$, la variation de C engendre les familles à un paramètre $\{ \Sigma(C) \}$ et $\{ S(C) \}$. Il résulte de la définition (10) que les membres de $\{ \Sigma(C) \}$ sont ordonnés par le paramètre C et peuvent être déduits l'un de l'autre par une translation parallèle à l'axe x_0. Par conséquent, il passe une surface du jeu et une seule par tout point de $\mathbf{X} \cup \Theta^f$.

Une surface du jeu donnée, $\Sigma(C)$, sépare $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ en deux ensembles disjoints

$$A/\Sigma(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x} : x_0 > C - V^*(x) \}.$$
$$B/\Sigma(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x} : x_0 < C - V^*(x) \}.$$

Un point $\mathbf{x} \in A/\Sigma(C)$ sera appelé *point de type* A ou plus brièvement A-*point* relativement à $\Sigma(C)$; et un point $\mathbf{x} \in B/\Sigma(C)$ sera appelé *point de type* B ou plus brièvement B-*point*, relativement à $\Sigma(C)$.

Avant d'établir un théorème fondamental, nous prouverons quelques lemmes préliminaires.

LEMME 1. — *Un trajet optimal* $\Pi^*(C)$ *dont le point terminal* $\tilde{\mathbf{x}}^*(t_f^*)$ *appartient à* Θ^f *est contenu dans la surface du jeu qui passe par* $\tilde{\mathbf{x}}^*(t_j^*)$.

Ce lemme est une conséquence directe des définitions d'un trajet optimal dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ et d'une surface du jeu, et du fait que

$$V(x, \theta^f; p^*, e^*) = V^*(x).$$

Du lemme 1 et du fait que les membres de $\{ \Sigma(C) \}$ sont ordonnés par le paramètre C, nous déduisons le lemme suivant :

LEMME 2. — *Un trajet optimal dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ *dont un point appartient à la surface du jeu* $\Sigma(C)$ *est contenu dans* $\Sigma(C)$.

Il est facile d'établir également le lemme 3.

LEMME 3. — *Un trajet* P-*optimal* [E-*optimal*] *dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ *dont le point initial appartient à la surface du jeu* $\Sigma(C)$ *ne peut atteindre* Θ^f *en un point de type* A [*de type* B] *relativement à* $\Sigma(C)$.

Considérons un trajet optimal dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ issu du même point. D'après le lemme 2 il appartient à $\Sigma(C)$, et par conséquent $x_0^*(t_f^*) = C$. Le lemme 3 est alors une conséquence directe de la condition du point en selle (9).

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Un trajet* P-*optimal dont le point initial appartient à la surface du jeu* $\Sigma(C)$ *n'a pas de point de type* A *relativement à* $\Sigma(C)$, *et un trajet* E-*optimal dont le point initial appartient à* $\Sigma(C)$ *n'a pas de point de type* B *relativement à* $\Sigma(C)$. *Un trajet optimal dans* $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ *dont le point initial appartient à* $\Sigma(C)$ *est contenu dans* $\Sigma(C)$.

Nous prouverons ce théorème par l'absurde. Supposons par exemple que le trajet P-optimal $\Pi_P(C_P)$ issu du point $\mathbf{x}^0 \in \Sigma(C)$ ait un A-point $\mathbf{x}'$ relativement à $\Sigma(C)$. Considérons un trajet optimal $\Pi^*(C')$ issu de $\mathbf{x}'$. D'après le lemme 2, le trajet optimal $\Pi^*(C')$ appartient à la surface du jeu $\Sigma(C')$, avec $C' > C$. Considérons alors le trajet dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ formé par l'union de la portion de trajet $\Pi_P(C_P)$ comprise entre $\mathbf{x}^0$

et $\mathbf{x}'$ et de $\Pi^*(C')$. C'est un trajet P-optimal. En effet, il peut être engendré par le couple stratégique (p', e') tel que

$$p'(x) = p^*(x),$$
$$e'(x) = e^*(x)$$

pour $x \in X$ avec $x_n \leqq x'_n$; et

$$p'(x) = p^*(x),$$
$$e'(x) = e(x)$$

pour $x \in X$ avec $x_n > x'_n$.

Comme $C' > C$, ce trajet P-optimal atteint Θ^f en un point de type A relativement à $\Sigma(C)$, et ceci contredit le lemme 3.

Par un raisonnement analogue on pourrait établir qu'un trajet E-optimal dont le point initial appartient à $\Sigma(C)$ ne peut avoir de point de type B relativement à $\Sigma(C)$.

La dernière partie du théorème résulte directement du lemme 2.

Le théorème 1 établit donc que non seulement une surface du jeu donnée, $\Sigma(C)$, est le lieu des trajets optimaux dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ issus de ses points, mais aussi qu'elle est une surface séparatrice pour les trajets P et E-optimaux issus de ses points. Cette propriété est illustrée par la figure 1.2.

1.2. Propriétés des solutions optimales.

1.2.1. Hypothèses.

Une étude plus complète des propriétés des solutions optimales nécessitera l'introduction de quelques hypothèses. Préalablement, nous serons amenés à définir une *décomposition* D du domaine X.

Nous dirons que $D \triangleq \{X_1, X_2, \ldots, X_K\}$ est une décomposition de X si :

(*a*) X_i, $i = 1, 2, \ldots, K < \infty$ est un domaine dans E^n dont la frontière est régulière par morceaux;

(*b*) $X_k \cap X_l = \emptyset$ $(k \neq l)$;

(*c*) $X_i \subseteq X$ $(i = 1, 2, \ldots, K)$;

(*d*) $X \subset \bigcup_{i=1}^{K} \overline{X}_i$.

Il résulte directement de ces conditions que $\overline{X} = \bigcup_{i=1}^{K} \overline{X}_i$.

Nous supposerons dans la suite qu'il existe une décomposition D de X possédant la propriété suivante :

Pour tout X_i, $i = 1, 2, \ldots, K$, il existe des fonctions p^i, e^i de classe C^0 sur un domaine $R^i \supset \overline{X}_i$, et pour tout ensemble non vide $M^{kl} \overset{\Delta}{=} \overline{X}_k \cap \overline{X}_l$, $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \ldots, K$, il existe des fonctions p^{kl}, e^{kl} de classe C^2 sur un domaine $R^{kl} \supset M^{kl}$, telles que

$$\left.\begin{aligned} p^*(x) &= p^i(x) \\ e^*(x) &= e^i(x) \end{aligned}\right\} \text{pour tout } x \in X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, K);$$

$$\left.\begin{aligned} p^*(x) &= p^{kl}(x) \\ e^*(x) &= e^{kl}(x) \end{aligned}\right\} \text{pour tout } x \in M^{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, K, k \neq l).$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} g_j^k(x) &\overset{\Delta}{=} f_j(x, p^k(x), e^k(x)) \\ g_j^{kl}(x) &\overset{\Delta}{=} f_j(x, p^{kl}(x), e^{kl}(x)) \end{aligned}\right\} (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Nous supposerons de plus que les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $M^{ij} \cap M^{kl} = \emptyset$ *pour* $ij \neq kl \neq ji$.

(ii) *Un ensemble non vide* M^{kl} *est une surface de dimension* $n - 1$ *qui peut être représentée paramétriquement par* $x = \chi^{kl}(s)$, *où* $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ *prend ses valeurs sur un cube fermé* $\mathcal{K}^{kl}$ *dans* E^{n-1}; χ^{kl} *est de classe* C^2 *et la matrice*

$$\frac{\partial \chi^{kl}}{\partial s} \overset{\Delta}{=} \left[\frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial s_j}\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

a le rang maximal sur un domaine contenant $\mathcal{K}^{kl}$.

Ainsi la surface M^{kl} peut être représentée [1] par une équation unique $m^{kl}(x) = 0$, où la fonction m^{kl} est de classe C^0 et $\operatorname{grad} m^{kl}(x) \neq 0$ sur un domaine contenant M^{kl}. Ceci implique de plus que M^{kl} possède une extension analytique.

Quand nous parlerons d'un point intérieur de M^{kl}, nous entendrons intérieur dans la topologie induite sur l'extension analytique de M^{kl}. L'intérieur de M^{kl} au sens de cette topologie sera désigné par $\mathring{M}^{kl}$.

(iii) *Un trajet dans* $X \cup 0^f$ *engendré par* (p^*, e^*) *ne peut atteindre ni quitter* M^{kl} *tangentiellement. Plus précisément, si*

$$\tilde{x}^*(t) \in X_k, \quad \forall\, t \in [t_1, t') \qquad t_1 < t',$$
$$\tilde{x}^*(t') = x' \in M^{kl},$$

---

[1] C'est-à-dire que $x \in M^{kl} \Rightarrow m^{kl}(x) = 0$.

alors

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') \neq 0.$$

(iv) $\operatorname{grad} m^f(x).g^i(x) > 0$ *pour* $x \in \theta^f$, *avec* $g^i = g^k$ *ou* g^{kl}, *si* $\operatorname{grad} m^f(x)$ *est tel que*

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall\, \varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leqq \alpha, \qquad x + \varepsilon \operatorname{grad} m^f(x) \in \operatorname{comp} \overline{X}$$

et inversement.

(v) $\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') \neq 0$, $x' \in M^{kl}$ *implique que*

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in M^{kl}$$

et de même pour $g^l(x)$.

(vi) $\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^{kl}(x) \neq 0$, $\forall\, x \in M^{kl}$ *si*

$$(a) \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) > 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) > 0$$

(ou inversement) pour tout $x \in M^{kl}$; *ou*

$$(b) \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) < 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) \geqq 0$$

pour tout $x \in M^{kl}$, *où* $\operatorname{grad} m^{kl}(x)$, $x \in \mathring{M}^{kl}$, *est tel que*

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall\, \varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leqq \alpha \qquad x + \varepsilon \operatorname{grad} m^{kl}(x) \in X_l$$

et inversement.

(vii) *Si* $\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) > 0$ *(ou* $\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) < 0$*) pour tout* $x \in M^{kl}$, *où* $\operatorname{grad} m^{kl}(x)$, $x \in \mathring{M}^{kl}$, *est tel que*

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall\, \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqq \alpha, \qquad x + \varepsilon \operatorname{grad} m^{kl}(x) \in X_l$$

et si $x^0 \in X_k$ *(ou* X_l*), il existe* $\beta > 0$ *tel que*

$$x^*(t) \in M^{kl} \quad \textit{pour tout} \quad t \in [t_f^* - \beta,\ t_f^*].$$

(viii) $M^{kl} \cap \theta^f = \emptyset$ *si*

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) > 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) > 0$$

(ou inversement) pour tout $x \in M^{kl}$.

1.2.2. Comportement des trajets dans un voisinage de M^{kl}

Dans ce paragraphe, nous étudierons le comportement de trajets dans $X \cup \theta^f$ engendrés par un couple stratégique optimal (p^*, e^*). En particulier nous porterons notre attention sur le « raccordement »

de trajets qui atteigent une surface M^{kl} et sur le comportement de trajets dans un voisinage de M^{kl}. Cette discussion nous permettra de classer les surfaces M^{kl} en différents types.

Soit x' un point intérieur [1] de M^{kl}, et considérons l'équation (1) avec $u = p^k(x)$, $v = e^k(x)$, où p^k, e^k sont les stratégies dont nous avons parlé plus haut, dont les valeurs coïncident avec celles de p^*, e^*, respectivement, sur X_k.

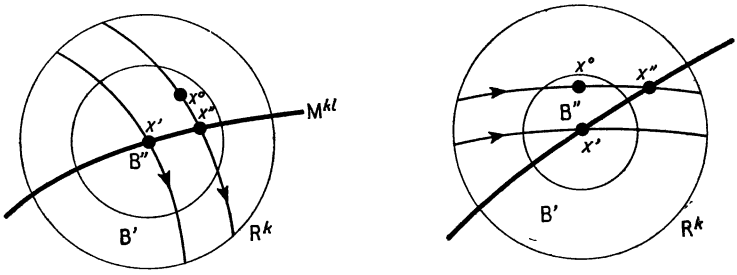

Fig. 1.3. — Trajets engendrés par (p^k, e^k).

Soit

$$q^k(\cdot, x', t') : \quad t \to x = q^k(t, x', t')$$

une solution de l'équation (1) pour $u = p^k(x)$, $v = e^k(x)$, telle que

$$x' = q^k(t', x', t').$$

Il résulte des théorèmes classiques (existence, unicité, fonction implicite) qu'il existe des boules ouvertes B' et B'' dans E^n de centre x', et des intervalles ouverts I' et I'' contenant t', tels que :

(*a*) la fonction $q^k : (t, x', t') \to q^k(t, x', t')$ est définie et continue sur $B' \times I' \times I'$;

(*b*) le trajet dans $X \cup \theta^f$ représenté par $q^k(\cdot, x^0, t_0)$, $x^0 \in B''$, $t_0 \in I''$, $t \in I'$, et M^{kl} ont le point d'intersection $x = x'' \in B'$ au temps $t = t'' \in I'$ (*fig.* 1.3).

Supposons que

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{tel que } \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqq \alpha, \qquad x + \varepsilon \operatorname{grad} m^{kl}(x') \in X_l,$$

---

[1] La discussion suivante s'applique aussi au cas des points frontière de M^{kl} en utilisant l'extension analytique de M^{kl}.

alors il résulte aussi des théorèmes classiques que :

(c) $q^k(., x', t')$ est une solution de l'équation (1), avec $u = p^*(x)$, $v = e^*(x)$, pour

$$t \in (t_1, t') \quad \text{si} \quad \operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') > 0,$$
$$t \in (t', t_2) \quad \text{si} \quad \operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') < 0,$$

où $(t_1, t_2) = \mathrm{I}'$.

Évidemment, on a des résultats analogues pour les solutions de l'équation (1) avec $u = p^l(x)$, $v = e^l(x)$. On peut donc raccorder des trajets qui atteignent M^{kl}.

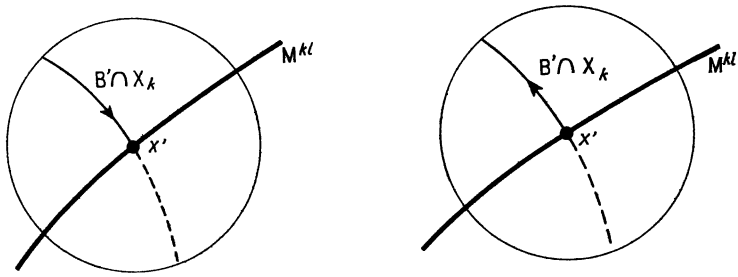

Fig. 1.4. — Trajets engendrés par (p^*, e^*).

Par exemple, si

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') > 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^l(x') > 0.$$

on a un trajet engendré par le couple stratégique optimal (p^*, e^*), qui traverse M^{kl} en x', les points en amont appartenant à X_k et les points en aval à X_l.

Pourvu que $\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x)$ soit non nul en un point de M^{kl}, il résulte de la condition (v) et de la continuité de $\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x)$ que le comportement des trajets dans un voisinage suffisamment petit de M^{kl} est uniforme. Par exemple, si un trajet atteint $x' \in \mathring{\mathrm{M}}^{kl}$ à partir de X_k, alors il en va de même pour tout point $x \in \mathring{\mathrm{M}}^{kl}$.

Si

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) = 0 \qquad x \in \mathrm{B}' \cap \mathrm{X}_k,$$

alors il résulte de la condition (iii) que le trajet correspondant n'atteint pas M^{kl}. Comme le comportement des trajets dans un voisinage suffisamment petit de M^{kl} est uniforme si $\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') \neq 0$, $x' \in \mathrm{M}^{kl}$, il doit aussi être uniforme dans le cas présent.

Nous pouvons maintenant dresser la liste des différents types de surfaces M^{kl} qui peuvent se présenter :

Surface de transition M^T :

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') > 0 \quad \text{ou} \quad < 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^l(x') > 0 \quad \text{ou} \quad < 0.$$

Surface répulsive M^R :

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') < 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^l(x') > 0.$$

Surface attractive M^A :

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') > 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^l(x') < 0.$$

Surface semi-attractive M^{SA} :

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') > 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) = 0, \qquad x \in B' \cap X_l.$$

Surface semi-répulsive M^{SR} :

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x').g^k(x') < 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) = 0, \qquad x \in B' \cap X_l.$$

Surface neutre M^N :

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^k(x) = 0, \qquad x \in B' \cap X_k,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^l(x) = 0, \qquad x \in B' \cap X_l.$$

Ces six types de surfaces M^{kl} sont représentés schématiquement sur la figure 1.5. Les flèches indiquent le sens de parcours des trajets pour des temps croissants.

Il convient de remarquer qu'un couple stratégique optimal (p^*, e^*) doit être tel que $\operatorname{grad} m^{kl}(x).g^{kl}(x) = 0$, $\forall\, x \in M^{kl}$ si $M^{kl} = M^A$, M^{SA} ou M^N. Ceci résulte du comportement des trajets dans un voisinage suffisamment petit des surfaces de discontinuité, et de la condition qui impose à (p^*, e^*) d'engendrer une partie complète à partir de *tout* point initial dans X.

De plus, d'après la condition (vi), aucun point d'un trajet optimal à l'exception de son point initial ne peut appartenir à une surface M^{kl} de type M^{SR} ou M^R [1].

---

[1] En fait, la condition (vi) est imposée de façon à éliminer les trajets optimaux appartenant à des surfaces de discontinuité de type M^T, M^R et M^{SR}.

Nous remarquerons également que les surfaces M^{kl} de type M^A, M^{SA} et M^N ont des intersections avec θ^f non vides puisque les trajets optimaux issus de points appartenant à ces surfaces y sont tout entiers contenus.

Il est facile de voir maintenant qu'un couple stratégique optimal engendre un trajet complet *unique* à partir d'un point de X_l.

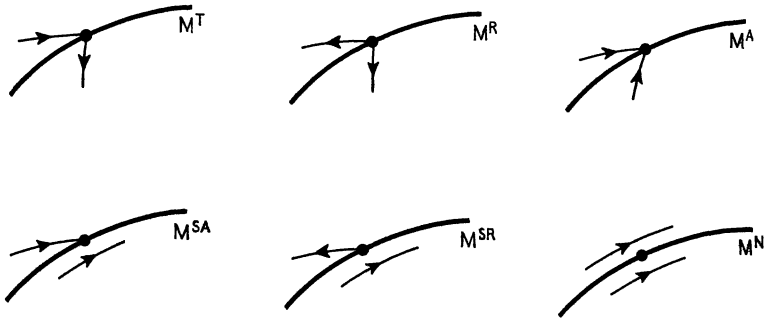

Fig. 1.5. — Différents types de surfaces M^{kl}.

Finalement, étant donné un trajet optimal, il résulte des théorèmes classiques qu'il existe un trajet optimal autre que le trajet optimal donné dans un voisinage de ce dernier. Plus précisément nous entendons ceci :

Soit x^0 un point de X_l, et soit B^0 une boule ouverte dans E^n de rayon ρ et de centre x^0. Désignons par τ le temps relatif (1), et par $\tilde{x}^*_\tau : \tau \to \tilde{x}^*_\tau(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^*_f]$, et $\tilde{y}^*_\tau : \tau \to \tilde{y}^*_\tau(\tau)$, $\tau \in [0, \hat{\tau}^*_f]$, les solutions de l'équation (1) pour les stratégies p^*, e^*, et pour les conditions initiales $\tilde{x}^*_\tau(0) = x^0$ et $\tilde{y}^*_\tau(0) = \hat{x}^0 \in B^0$, respectivement. Alors il existe $\rho > 0$ tel que

$$\| \tilde{y}^*_\tau(\tau) - \tilde{x}^*_\tau(\tau) \| = k(\tau)\rho + o(\rho, \tau),$$

où $k(\tau)$ est borné et $\frac{o(\rho, \tau)}{\rho} \to 0$ uniformément pour tout $\tau \in [0, \tau^*_f]$ (2) quand $\rho \to 0$, et

$$| \hat{\tau}^*_f - \tau^*_f | = l\rho + o(\rho),$$

où l est borné et $\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$. On a un résultat analogue si x^0 est un point intérieur d'une surface M^{kl} de type M^A, M^{SA} ou M^N, et $\hat{x}^0 \in B^0 \cap M^{kl}$.

---

(1) C'est à-dire que $t = t_0 + \tau$ le long de π^* issu de x_0.

(2) Pourvu que $\tau^*_f \leq \hat{\tau}^*_f$; si non $\tau \in [0, \hat{\tau}^*_f]$.

En établissant l'existence d'un trajet optimal, autre que le trajet optimal donné, dans un voisinage de ce dernier, pour un trajet optimal donné issu d'un point $x^0 \in X_i$, on doit tenir compte du fait que le trajet optimal peut traverser une ou plusieurs surfaces de transition, puis entrer dans une surface attractive ou semi-attractive avant d'atteindre la cible θ' (*fig.* 1.6).

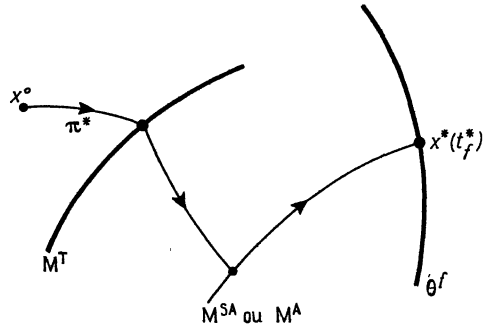

Fig. 1.6. — Trajet optimal.

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
SAINT-MARTIN-D'HÈRES

On utilise les conditions (iii) et (iv) pour démontrer que des trajets optimaux issus de points initiaux voisins x^0 et $\hat{x}^0$ atteignent M^T, M^A ou M^{SA}, et θ' en des points correspondant à des valeurs voisines du temps relatif τ.

1.3. Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

1.3.1. Partie dans un ouvert de la décomposition D.

Soit $\{X_1, X_2, \ldots, X_K\}$ la décomposition de X correspondant au couple stratégique optimal (p^*, e^*). En s'appuyant sur le fait qu'à un trajet optimal dans $X \cup \theta'$, issu d'un point de X_i, est associé un ensemble de trajets optimaux voisins, on peut montrer que V^* est deux fois différentiable [1] sur X_i, $i = 1, 2, \ldots, K$, et il en va évidemment de même pour Φ sur $\mathbf{X}_i \overset{\Delta}{=} X_i \times \{x_0\}$. En particulier :

$$\operatorname{grad} \Phi = \left(1, \frac{\partial V^*}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V^*}{\partial x_n}\right)$$

est défini et continu sur $\mathbf{X}_i$.

---

[1] C'est-à-dire que V^* est de classe C^1 et $\dfrac{\partial^2 V^*}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sont définis.

Ce résultat s'établit par calcul direct de $V^*(x)$ et de grad $V^*(x)$ pour des trajets optimaux voisins, issus de points initiaux voisins dans X_i, et en utilisant les conditions (iii), (iv), (vii) et (viii) du paragraphe 1.2.1.

Considérons maintenant le point $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \in \mathbf{X}_i$, $t \in [t_0, t_f^*)$, du trajet optimal $\Pi^*(C)$ engendré par (p^*, e^*) dans $\Sigma(C)$. Considérons aussi les trajets P et E-optimal engendrés par (p^*, e) et (p, e^*), respectivement, et passant par le point $\mathbf{x}$.

Puisque

$$\Phi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}).\Delta\mathbf{x} + o(\|\Delta\mathbf{x}\|),$$

il résulte directement du théorème 1 que

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}).F(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e(\mathbf{x})) \leqq 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}).F(\mathbf{x}, p(\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})) \geqq 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}).F(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})) = 0. \tag{13}$$

Évidemment, les conditions (11) et (12) sont valables pour tous les trajets P et E-optimal passant par $\mathbf{x}$.

Nous compléterons ces résultats en établissant l'équation de transfert de $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})$ le long de la portion de trajet optimal $\Pi^*(C)$ contenue dans $\mathbf{X}_i$. Nous remarquerons pour cela que la condition (13) est une identité en $\mathbf{x}$ sur $\mathbf{X}_i$.

Par conséquent, nous avons

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} F(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})) + \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial x}\right] = 0, \tag{14}$$

où

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \triangleq \left[\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{x})}{\partial x_i\,\partial x_j}\right] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial f_i(x, u, v)}{\partial x_j}\right] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \triangleq \left[\frac{\partial f_i(x, u, v)}{\partial u_j}\right] \qquad (i = 0, 1, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} \triangleq \left[\frac{\partial f_i(x, u, v)}{\partial v_j}\right] \qquad (i = 0, 1, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, q),$$

les dérivées partielles étant calculées en $u = p^*(\mathbf{x})$, $v = e^*(\mathbf{x})$; et

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial p_i^*(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r; j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial e^*}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial e_i^*(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, q; j = 0, 1, \ldots, n).$$

D'autre part, pour $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^*(t)$, nous avons [1]

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\mathrm{F}(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})),$$

de telle sorte que l'équation (14) devient

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}) = -\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial x}\right] \tag{15}$$

pour $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^*(t) \in \mathbf{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$.

Posons

$$\lambda_i = \tilde{\lambda}_i(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \mathrm{V}^*(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=\tilde{x}^*(t)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}(t) \stackrel{\Delta}{=} (1, \tilde{\lambda}(t)), \qquad \lambda = \tilde{\lambda}(t) = (\tilde{\lambda}_1(t), \tilde{\lambda}_2(t), \ldots, \tilde{\lambda}_n(t))$$

et

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) \stackrel{\Delta}{=} f_0(x, u, v) + \lambda . f(x, u, v).$$

Nous pouvons mettre les conditions (11)-(13) sous la forme

$$\mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e\ (\tilde{x}^*(t))) \leqq 0, \tag{11$'$}$$

$$\mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p\ (\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) \geqq 0, \tag{12$'$}$$

$$\mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) = 0 \tag{13$'$}$$

pour tous les couples stratégiques jouables (p^*, e) et (p, e^*).

L'équation (15) devient

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial x}\right]. \tag{15$'$}$$

Les conditions (11)$'$-(13)$'$ et l'équation (15)$'$ peuvent aussi être obtenues par une méthode différente nécessitant des hypothèses plus faibles [36].

Par une construction analogue à celle que nous avons utilisée dans la démonstration du théorème 1, on arrive aux résultats suivants :

(*a*) Étant donnés p^*, $v \in \mathrm{K}_\nu(x)$ et $x \in \mathrm{X}$, il existe e tel que $e(x) = v$ et tel que (p^*, e) soit jouable sur X.

---

[1] Ici nous supposons que $\frac{\partial^2 \mathrm{V}^*}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathrm{V}^*}{\partial x_j \partial x_i}$. L'équation (15) peut être obtenue sans cette hypothèse supplémentaire en utilisant le plan tangent $\Sigma(\mathrm{C})$ en des points intérieurs de $\mathbf{X}_i$; ce dernier est défini puisque $\operatorname{grad}\mathrm{V}^*$ est de classe C^1 sur X_i. Le calcul est développé dans la référence [36].

(*b*) Étant donnés e^*, $u \in K_u(x)$ et $x \in X$, il existe p tel que $p(x) = u$ et tel que (p, e^*) soit jouable sur X.

Par conséquent, les conditions (11)'-(13)' peuvent être remplacées par

$$(11)'' \qquad \operatorname*{Max}_{v \in K_v(\tilde{x}^*(t))} \mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), v) = 0,$$

$$(12)'' \qquad \operatorname*{Min}_{u \in K_u(\tilde{x}^*(t))} \mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), u, e^*(\tilde{x}^*(t))) = 0,$$

$$(13)'' \qquad \mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) = 0.$$

Supposons maintenant que les ensembles de contraintes $K_u(x)$ et $K_v(x)$, respectivement, soient donnés sous la forme [1] :

$$\varphi_i(\mathbf{x}, u) \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$
$$\psi_i(\mathbf{x}, v) \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

où

(i) les fonctions φ_i et ψ_i sont de classe C^1 sur $G \times U$ et $G \times V$, respectivement;

(ii) si $k > r$ et $l > q$, alors au plus r des $\varphi_i(\mathbf{x}, u)$ et au plus q des $\psi_i(\mathbf{x}, v)$ peuvent s'annuler en un point de $G \times U$ et de $G \times V$, respectivement;

(iii) les matrices

$$\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k' \leqq r; j = 1, 2, \ldots, r)$$

et

$$\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial v_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, l' \leqq q; j = 1, 2, \ldots, q)$$

formées à partir des composantes nulles des $\varphi_i(\mathbf{x}, u)$ et $\psi_i(\mathbf{x}, v)$ respectivement, ont le rang maximal.

Supposons que

$$\varphi_i(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x})) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k'),$$
$$\psi_i(\mathbf{x}, e^*(\mathbf{x})) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l')$$

---

[1] Certaines de ces conditions peuvent être des égalités, les résultats qui suivent ne s'en trouvent pas modifiés. Remarquons aussi que les fonctions φ_i et ψ_i sont indépendantes de x_0.

au point $\mathbf{x} = \mathfrak{X}^*(t)$. Si les conditions $(11)''$ et $(12)''$ sont vérifiées, alors il résulte de la règle des multiplicateurs de Lagrange que

$$\Lambda \frac{\partial F}{\partial u} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\Lambda \frac{\partial F}{\partial v} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0,$$

où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \triangleq \left[\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}, u)}{\partial u_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} \triangleq \left[\frac{\partial \psi_i(\mathbf{x}, v)}{\partial v_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, l; j = 1, 2, \ldots, q),$$

les dérivées partielles étant calculées en

$$\mathbf{x} = \mathfrak{X}^*(t), \qquad u = p^*(\mathbf{x}), \qquad v = e^*(\mathbf{x})$$

et

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k'}, 0, \ldots, 0), \qquad \text{avec } \mu_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k'),$$
$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{l'}, 0, \ldots, 0), \qquad \text{avec } \nu_i \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l').$$

Comme $\varphi_i(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}))$, $i = 1, 2, \ldots, k'$, et $\psi_i(\mathbf{x}, e^*(\mathbf{x}))$, $i = 1, 2, \ldots, l'$, ont un extrêmum (maximum) en $\mathbf{x} = \mathfrak{X}^*(t)$, nous avons

$$\mu \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial p^*}{\partial x}\right] = 0,$$

$$\nu \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial e^*}{\partial x}\right] = 0,$$

où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}, u)}{\partial x_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k; j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \triangleq \left[\frac{\partial \psi_i(\mathbf{x}, v)}{\partial x_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, l; j = 0, 1, \ldots, n),$$

les dérivées partielles étant calculées en

$$\mathbf{x} = \mathfrak{X}^*(t), \qquad u = p^*(\mathbf{x}), \qquad v = e^*(\mathbf{x}).$$

Ainsi, l'équation $(15)'$ peut être mise sous la forme

$$(15)'' \qquad \frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda \frac{\partial F}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

où μ et ν sont des multiplicateurs indéterminés de dimensions k et l, respectivement. Si les composantes des contraintes qui s'annulent

changent un nombre fini de fois sur $[t_0, t_f^*]$, ces multiplicateurs sont continus par morceaux sur $[t_0, t_f^*]$.

Si $K_u(x)$ et $K_v(x)$ sont indépendants de l'état x, l'équation (15)'' se réduit à :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda \frac{\partial F}{\partial x}.$$

1.3.2. CONDITION DE SAUT A LA TRAVERSÉE D'UNE SURFACE DE TRANSITION.

Considérons une surface M^{kl} de type M^T et supposons qu'un trajet optimal $\Pi^*(C)$ traverse

$$\mathfrak{M}^{kl} \overset{\Delta}{=} M^{kl} \times \{x_0\} \quad \text{en } \mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}^*(t'), \qquad t' \in (t_0, t_f^*).$$

A partir des conditions (iii), (vii) et (viii) du paragraphe 1.2.1, on peut établir que [1] V^* est continue sur $X_k \cup \mathring{M}^{kl} \cup X_l$ et que $\operatorname{grad} V^*$ est continu sur $X_k \cup \mathring{M}^{kl}$ et $X_l \cup \mathring{M}^{kl}$. Posons

$$\operatorname{grad} V^*(x')_- \overset{\Delta}{=} \lim_{\substack{t \to t' \\ t < t'}} \operatorname{grad} V^*(\tilde{x}^*(t)),$$

$$\operatorname{grad} V^*(x')_+ \overset{\Delta}{=} \lim_{\substack{t \to t' \\ t > t'}} \operatorname{grad} V^*(\tilde{x}^*(t)),$$

de telle sorte que

$$\tilde{\Lambda}(t'-0) = (1, \operatorname{grad} V^*(x')_-),$$
$$\tilde{\Lambda}(t'+0) = (1, \operatorname{grad} V^*(x')_+).$$

Comme les limites à gauche et à droite de $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})$ sont définies en $\mathbf{x}'$, il en va de même pour celles du plan tangent $T_\Sigma(\mathbf{x})$ de $\Sigma(C)$. Nous désignerons ces dernières par $T_\Sigma^-(\mathbf{x}')$ et $T_\Sigma^+(\mathbf{x}')$ respectivement. Nous désignerons d'autre part par $T_{\Sigma\cap\mathfrak{M}}^{kl}(\mathbf{x}')$ le plan tangent de $\Sigma(C) \cap \mathfrak{M}^{kl}$ en $\mathbf{x}'$. Remarquons maintenant que $\tilde{\Lambda}(t'-0)$, $\tilde{\Lambda}(t'+0)$ et $\operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}')$ [2] sont normaux au plan $T_{\Sigma\cap\mathfrak{M}}^{kl}(\mathbf{x}')$ de dimension $n-1$. Par conséquent ces vecteurs sont linéairement dépendants, c'est-à-dire que

$$c_1 \tilde{\Lambda}(t'-0) + c_2 \tilde{\Lambda}(t'+0) + c_3 \operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}') = 0,$$

où les constantes c_i, $i = 1, 2, 3$, ne sont pas toutes nulles.

---

[1] Ceci peut être établi par calcul direct et résulte aussi clairement du fait que, par tout point de $\mathfrak{M}^{kl}$ passe un trajet optimal dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ qui traverse $\mathfrak{M}^{kl}$.

[2] Évidemment, $m^{kl}(\mathbf{x}) = m^{kl}(x)$.

Comme les composantes de $\tilde{\lambda}(t'-0)$ et $\tilde{\lambda}(t'+0)$ sur l'axe x_0 sont égales, et comme la composante de $\operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}')$ sur cet axe est nulle, on a $c_1 = -c_2$. De plus, $\operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}') \neq 0$ et par conséquent $c_1 = -c_0 \neq 0$. Nous pouvons donc écrire

$$\tilde{\lambda}(t'-0) - \tilde{\lambda}(t'+0) + \frac{c_3}{c_1} \operatorname{grad} m^{kl}(x') = 0. \tag{16}$$

La constante $\frac{c_3}{c_1}$ peut être calculée à partir de la condition (13)' en faisant tendre t vers t' à gauche et à droite. Posant

$$\mathrm{F}^- = (f_0^-, f^-) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\substack{t \to t' \\ t < t'}} \mathrm{F}(\mathfrak{X}^*(t), p^*(\mathfrak{X}^*(t)), e^*(\mathfrak{X}^*(t))),$$

$$\mathrm{F}^+ = (f_0^+, f^+) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\substack{t \to t' \\ t > t'}} \mathrm{F}(\mathfrak{X}^*(t), p^*(\mathfrak{X}^*(t)), e^*(\mathfrak{X}^*(t))),$$

nous obtenons

$$\frac{c_3}{c_1} = -\frac{f_0^+ + \tilde{\lambda}(t'-0).f^+}{\operatorname{grad} m^{kl}(x').f^+} = \frac{f_0^- + \tilde{\lambda}(t'+0).f^-}{\operatorname{grad} m^{kl}(x').f^-}$$

La condition (16) est la *condition de saut* au point où $\Pi^*(\mathrm{C})$ traverse $\mathfrak{M}^{kl}$.

1.3.3. Points intérieurs de M^{SA} et M^{A}.

Nous porterons maintenant notre attention sur les points intérieurs des surfaces M^{kl} de types M^{SA} et M^{A}. Nous supposerons que les trajets optimaux dans $\mathbf{X} \cup \Theta^f$ atteignent la surface $\mathfrak{M}^{kl} = \overline{\mathbf{X}}_k \cap \overline{\mathbf{X}}_l$ à partir du domaine $\mathbf{X}_k$ [1].

Des conditions (iii) et (vii) du paragraphe 1.2.1, on peut déduire que Φ et $\operatorname{grad}\Phi$ sont continus et que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ est définie sur $\mathbf{X}_k \cup \mathring{\mathfrak{M}}^{kl}$. Ainsi il existe une fonction Φ^k dont les dérivées partielles secondes sont définies sur un domaine contenant $\mathbf{X}_k \cup \mathring{\mathfrak{M}}^{kl}$, et qui prend en tout point de $\mathbf{X}_k \cup \mathring{\mathfrak{M}}^{kl}$ la même valeur que la fonction Φ.

Considérons maintenant le trajet optimal $\Pi^*(\mathrm{C})$ et le point $\mathbf{x} = \tilde{\mathfrak{X}}^*(t) \in \mathring{\mathfrak{M}}^{kl}$ de ce trajet.

Puisque

$$\Phi^k(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \Phi^k(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}).\Delta\mathbf{x} + o(\|\Delta\mathbf{x}\|),$$

---

[1] Évidemment si $\mathrm{M}^{kl} = \mathrm{M}^{\mathrm{A}}$, la surface $\mathfrak{M}^{kl}$ est atteinte à partir des domaines $\mathbf{X}_k$ et $\mathbf{X}_l$.

il résulte du théorème 1 que

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}).\mathrm{F}(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e\ (\mathbf{x})) \leqq 0,$$

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}).\mathrm{F}(\mathbf{x}, p\ (\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})) \geqq 0,$$

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}).\mathrm{F}(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})) = 0.$$

Ces conditions sont valables pour tous les trajets P et E-optimal passant par $\mathbf{x}$, et tels que

$$\text{(20)} \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}).\mathrm{F}(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e\ (\mathbf{x})) = 0,$$

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}).\mathrm{F}(\mathbf{x}, p\ (\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})) = 0.$$

Nous compléterons ces résultats en établissant l'équation de transfert de grad $\Phi^k(\mathbf{x})$ le long de la portion de trajet optimal $\Pi^*(\mathrm{C})$ contenue dans $\Sigma(\mathrm{C}) \cap \mathfrak{M}^{kl}$. Nous remarquerons pour cela que la condition (19) est une identité en $\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^{kl}$.

Par conséquent nous avons

$$\text{(22)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2}\mathrm{F}(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e(\mathbf{x})) + \operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x})\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial x}\right] + \alpha \operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}) = 0,$$

où α est un multiplicateur scalaire indéterminé, et

$$\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \overset{\Delta}{=} \left[\frac{\partial^2 \Phi^k(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

De plus, pour $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^*(t)$ nous avons [1]

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2}\mathrm{F}(\mathbf{x}, p^*(\mathbf{x}), e^*(\mathbf{x})).$$

Posant

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}(t) = (1, \tilde{\lambda}(t)) \overset{\Delta}{=} \operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}),$$

nous pouvons mettre les conditions (17)-(19) sous la forme

$$\text{(17)}' \qquad \mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e\ (\tilde{x}^*(t))) \leqq 0,$$

$$\text{(18)}' \qquad \mathcal{H}(\tilde{\ }(t), \tilde{x}^*(t), p\ (\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) \geqq 0,$$

$$\text{(19)}' \qquad \mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) = 0$$

pour tous les couples stratégiques (p^*, e) et (p, e^*) jouables satisfaisant à

$$\text{(20)}' \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(\tilde{x}^*(t)).f(\tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e\ (\tilde{x}^*(t))) = 0,$$

$$\text{(21)}' \qquad \operatorname{grad} m^{kl}(\tilde{x}^*(t)).f(\tilde{x}^*(t), p\ (\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) = 0.$$

---

[1] *Voir* note en bas de la page 19.

Il est clair que des conditions analogues à (11)''-(13)'' s'appliquent, à ceci près que, en plus de $u \in K_u(x)$ et $v \in K_v(x)$, on a les contraintes

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x) . f(x, p^*(x), v) = 0,$$
$$\operatorname{grad} m^{kl}(x) . f(x, u, e^*(x)) = 0.$$

De plus, l'équation (22) devient

$$(22)' \qquad \frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial x}\right] - \alpha \operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x}),$$

où α est une fonction définie pour tout t tel que $\tilde{\mathbf{x}}^*(t) \in \mathring{\mathfrak{M}}^{kl}$.

Les conditions (17)'-(19)' sont analogues à (11)'-(13)' qui sont applicables aux points de $\mathbf{X}_i$; cependant les conditions (17)'-(19)' s'appliquent à une classe restreinte de couples stratégiques P et E-optimal. Comme $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x})$ tend vers $\operatorname{grad}\Phi^k(\mathbf{x}')$ quand $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^{kl}$, il n'y a pas de condition de saut pour $\tilde{\Lambda}(t)$ au point où $\Pi^*(C)$ atteint $\mathfrak{M}^{kl}$. Cependant l'équation (22)' diffère de l'équation (15)' par l'addition du terme $-\alpha \operatorname{grad} m^{kl}(\mathbf{x})$.

1.3.4. Points intérieurs de M^N.

Finalement nous nous intéresserons aux points intérieurs d'une surface neutre M^{kl}. Aucun trajet complet dans $X \cup \theta^f$ dont le point initial n'appartient pas à une surface M^{kl} de type M^N n'atteint cette surface, et si le point initial du trajet appartient à M^{kl}, le trajet y est tout entier continu.

Rappelons qu'une surface M^{kl} peut être représentée paramétriquement par

$$x = \chi^{kl}(s), \qquad s \in \mathcal{K}^{kl} \subset E^{n-1}.$$

L'établissement de conditions nécessaires d'optimalité en un point intérieur de $\mathfrak{M}^{kl}$ s'appuie sur des raisonnements très semblables à ceux que nous avons développés plus haut à propos des points d'un domaine $\mathbf{X}_i$. La principale différence tient à la diminution d'une unité de la dimension de l'espace.

Puisqu'un trajet optimal $\Pi^*(C)$ est maintenant contenu dans $\Sigma(C) \cap \mathfrak{M}^{kl}$, nous sommes amenés à représenter cette surface de dimension $n-1$ en utilisant le paramètre $\sigma = (x_0, s)$. Nous poserons

$$V^N(s) \stackrel{\Delta}{=} V^*(\chi^{kl}(s))$$

et

$$\Phi^N(\sigma) \stackrel{\Delta}{=} x_0 + V^N(s) = C.$$

Le calcul direct de V^N et $\frac{\partial V^N}{\partial s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, pour des trajets optimaux voisins dans $X \cup \theta^f$, issus de points initiaux voisins dans M^N, montre que V^N est deux fois différentiable sur $\mathcal{K}^{kl}$, de telle sorte que

$$\operatorname{grad}\Phi^N(\sigma) = \left(1, \frac{\partial V^N(s)}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial V^N(s)}{\partial s_{n-1}}\right)$$

est continu, et que les matrices

$$\frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \sigma^2} \triangleq \left[\frac{\partial^2 \Phi^N(\sigma)}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\right] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sont définies sur $\mathcal{K}^{kl} \times \{x_0\}$.

Pour $x = \tilde{x}(t) \in M^{kl}$, nous avons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \chi^{kl}}{\partial s}\frac{ds}{dt} = f(x, p(x), e(x)),$$

où la matrice $\frac{\partial \chi^{kl}}{\partial s}$ est de rang $n-1$. Ainsi,

$$\frac{ds}{dt} = f^N(s, p^N(s), e^N(s)),$$

avec $f^N \triangleq Q^{-1}\hat{f}$, où Q est un mineur non singulier de $\frac{\partial \chi^{kl}}{\partial s}$, $\hat{f}$ est la partie correspondante de f, et

$$p^N(s) \triangleq p(\chi^{kl}(s)), \qquad e^N(s) \triangleq e(\chi^{kl}(s)).$$

Soit

$$F^N \triangleq (f_0^N, f^N), \qquad f_0^N(s, u, v) \triangleq f_0(\chi^{kl}(s), u, v),$$
$$p^{N*}(s) \triangleq p^*(\chi^{kl}(s)), \qquad e^{N*}(s) \triangleq e^*(\chi^{kl}(s)).$$

En invoquant à nouveau le théorème 1, nous obtenons

$$\operatorname{grad}\Phi^N(\sigma).F^N(\sigma, p^{N*}(\sigma), e^N(\sigma)) \leqq 0, \tag{23}$$
$$\operatorname{grad}\Phi^N(\sigma).F^N(\sigma, p^N(\sigma), e^{N*}(\sigma)) \geqq 0, \tag{24}$$
$$\operatorname{grad}\Phi^N(\sigma).F^N(\sigma, p^{N*}(\sigma), e^{N*}(\sigma)) = 0 \tag{25}$$

pour tous les couples stratégiques (p^{N*}, e^N) et (p^N, e^{N*}) jouables, et pour $\sigma \in \mathcal{K}^{kl} \times \{x_0\}$.

En nous appuyant de nouveau sur le fait que la condition (25) est une identité en $\sigma \in \mathcal{K}^{kl} \times \{x_0\}$, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \sigma^2} F^N(\sigma, p^{N*}(\sigma), e^{N*}(\sigma)) + \operatorname{grad}\Phi^N(\sigma)\left[\frac{\partial F^N}{\partial \sigma} + \frac{\partial F^N}{\partial u}\frac{\partial p^{N*}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F^N}{\partial v}\frac{\partial e^{N*}}{\partial \sigma}\right] = 0 \tag{26}$$

où

$$\frac{\partial F^N}{\partial \sigma} \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{\partial f_i^N(\sigma, u, v)}{\partial \sigma_j}\right] \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\frac{\partial F^N}{\partial u} \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{\partial f_i^N(\sigma, u, v)}{\partial u_j}\right] \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1; j = 1, 2, \ldots, r),,$$

$$\frac{\partial F^N}{\partial v} \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{\partial f_i^N(\sigma, u, v)}{\partial v_j}\right] \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1; j = 1, 2, \ldots, q),$$

les dérivées partielles étant calculées en $u = p^{N*}(\sigma)$, $v = e^{N*}(\sigma)$; et

$$\frac{\partial p^{N*}}{\partial \sigma} \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{\partial p_i^{N*}(\sigma)}{\partial \sigma_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, r; j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$\frac{\partial e^{N*}}{\partial \sigma} \stackrel{\Delta}{=} \left[\frac{\partial e_i^{N*}(\sigma)}{\partial \sigma_j}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, q; j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

De plus, le long de $\Pi^*(C)$, c'est-à-dire pour $\sigma = \tilde{\sigma}^*(t)$, $t \in [t_0, t_f^*)$, nous avons [1]

$$\frac{d}{dt} \operatorname{grad} \Phi^N(\sigma) = \frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \sigma^2} F^N(\sigma, p^{N*}(\sigma), e^{N*}(\sigma)).$$

Posant

$$\Lambda^N = \tilde{\Lambda}^N(t) = (1, \tilde{\lambda}^N(t)) \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{grad} \Phi^N(\sigma)$$

et

$$\mathcal{H}^N(\lambda^N, s, u, v) \stackrel{\Delta}{=} f_0^N(s, u, v) + \lambda^N . f^N(s, u, v),$$

nous pouvons mettre les conditions (23)-(25) sous la forme

$$(23)' \qquad \mathcal{H}^N(\tilde{\lambda}^N(t), \tilde{s}^*(t), p^{N*}(\tilde{s}^*(t)), e^N(\tilde{s}^*(t))) \leqq 0,$$

$$(24)' \qquad \mathcal{H}^N(\tilde{\lambda}^N(t), \tilde{s}^*(t), p^N(\tilde{s}^*(t)), e^{N*}(\tilde{s}^*(t))) \geqq 0,$$

$$(25)' \qquad \mathcal{H}^N(\tilde{\lambda}^N(t), \tilde{s}^*(t), p^{N*}(\tilde{s}^*(t)), e^{N*}(\tilde{s}^*(t))) = 0$$

pour tous les couples stratégiques (p^{N*}, e^N) et (p^N, e^{N*}) jouables.

L'équation (26) devient

$$(26)' \qquad \frac{d\Lambda^N}{dt} = -\Lambda^N \left[\frac{\partial F^N}{\partial \sigma} + \frac{\partial F^N}{\partial u}\frac{\partial p^{N*}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F^N}{\partial v}\frac{\partial e^{N*}}{\partial \sigma}\right].$$

1.3.5. Condition de transversalité.

Nous établirons maintenant la condition qui doit être vérifiée au point terminal d'un trajet optimal $\Pi^*(C)$.

---

[1] *Voir* note en bas de la page 19.

Considérons d'abord le cas d'un trajet optimal π^* qui atteint la cible θ^f à partir de X_k. Plus précisément, supposons que $\tilde{x}^*(t_f^*) \in \theta^f$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x^*(t) \notin M^{k'}$, $\forall t \in [t_f^* - \alpha, t_f^*)$.

Le point terminal $\tilde{\mathbf{x}}^*(t_f^*)$ de $\Pi^*(C)$ appartient à $\Sigma(C) \cap \Theta^f$. Puisque la cible θ^f est la projection de $\Sigma(C) \cap \Theta^f$ sur E^n, et puisque le plan tangent $T_\theta(x)$ de θ^f est défini en tout point $x \in \theta^f$, le plan tangent $T_{\Sigma \cap \Theta}(\mathbf{x})$ de $\Sigma(C) \cap \Theta^f$ est défini en $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^*(t_f^*)$.

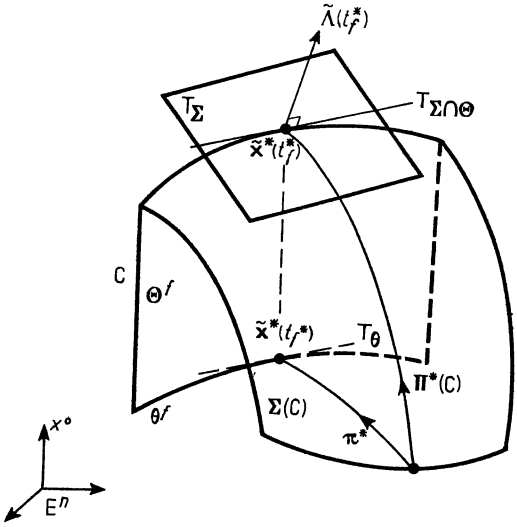

Fig. 1.7. — Condition de transversalité.

On a

$$T_{\Sigma \cap \Theta}(\mathbf{x}) = \{ (C, x) : x \in T_\theta(\tilde{x}^*(t_f^*)) \}.$$

A partir de la condition (iv) du paragraphe 1.2.1, on peut établir que grad Φ est continu sur $\mathbf{X}_k \cup (\overline{\mathbf{X}}_k \cap \Theta^f)$; par conséquent, $\Sigma(C)$ a un plan tangent et un seul, $T_\Sigma(\mathbf{x})$, en $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^*(t_f^*)$. Il est clair que $T_{\Sigma \cap \Theta}(\mathbf{x}) \subset T_\Sigma(\mathbf{x})$. Puisque $\tilde{\Lambda}(t_f^*)$ est normal à $T_\Sigma(\mathbf{x})$, il est normal à tout vecteur $\eta = (0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ appartenant à $T_{\Sigma \cap \Theta}(\mathbf{x})$.

Nous arrivons ainsi à la condition de transversalité

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i(t_f^*)\, \eta_i = 0, \tag{27}$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m^f(x)}{\partial x_i} \eta_i = 0.$$

Si l'on résout par rapport à l'une des composantes de η et si l'on substitue dans l'équation (27), l'annulation des coefficients des $n-1$ composantes arbitraires restantes donne $n-1$ conditions. En y adjoignant l'équation de θ^f on a au total n conditions au point terminal de π^*.

Si la portion terminale de π^* appartient à une surface M^{kl} de type M^{SA} ou M^A, et si π^* atteint M^{kl} à partir de X_A, la condition de transversalité est la même que dans le cas précédent. Évidemment, on a dans ce cas

$$\tilde{\Lambda}(t) = \operatorname{grad}\Phi^k(\mathfrak{X}^*(t)).$$

Finalement, nous examinerons le cas d'un trajet optimal π^* qui appartient à une surface M^{kl} de type M^N. Le point terminal du trajet optimal $\Pi^*(C)$ correspondant appartient à

$$[\Sigma(C)\cap\mathfrak{M}^{kl}]\cap[\Theta^f\cap\mathfrak{M}^{kl}].$$

L'équation de $\Sigma(C)\cap\mathfrak{M}^{kl}$, écrite plus haut, est

$$\Phi^N(\sigma)\overset{\Delta}{=}x_0+V^N(s)=C.$$

Puisque $\operatorname{grad}\Phi^N(\sigma)$ est défini en $\sigma=\tilde{\sigma}^*(t_f^*)$, il en va de même pour le plan tangent $T^{kl}_{\Sigma\cap\mathfrak{M}}(\sigma)$ de $\Sigma(C)\cap\mathfrak{M}^{kl}$. D'ailleurs, puisque $\theta^f\cap M^{kl}$ est la projection sur E^n de

$$[\Sigma(C)\cap\mathfrak{M}^{kl}]\cap[\Theta^f\cap\mathfrak{M}^{kl}],$$

cette dernière surface est définie par

$$x_0=C,\qquad m^N(s)\overset{\Delta}{=}m^f(\chi^{kl}(s))=0$$

et son plan tangent $T^{kl}_{\Sigma\cap\mathfrak{M}\cap\Theta}(\sigma)$ est défini en $\sigma=\tilde{\sigma}^*(t_f^*)$, puisque $\operatorname{grad}m^N(\sigma)$ est défini sur un voisinage de ce point.

Comme plus haut, nous remarquerons que $T^{kl}_{\Sigma\cap\mathfrak{M}\cap\Theta}(\sigma)\subset T^{kl}_{\Sigma\cap\mathfrak{M}}(\sigma)$, et que $\tilde{\Lambda}^N(t_f^*)$ est normal à $T^{kl}_{\Sigma\cap\mathfrak{M}}(\sigma)$, ce qui implique qu'il est normal à tout vecteur $\eta=(0,\eta_1,\ldots,\eta_{n-1})\in T^{kl}_{\Sigma\cap\mathfrak{M}\cap\Theta}(\sigma)$. Nous arrivons finalement à la condition de transversalité

$$\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{\lambda}_i^N(t_f^*)\,\eta_i=0, \tag{28}$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial m^N(s)}{\partial s_i}\eta_i=0.$$

1.3.6. Conditions suffisantes d'optimalité.

Nous compléterons cette étude en donnant des conditions suffisantes d'optimalité. Ces conditions permettent de savoir si un couple stratégique jouable satisfait à la condition du point en selle (3).

Supposons que p^e, e^e soit un couple stratégique jouable tel que

(i)

$$f_0(x, p^e(x), e^e(x)) + \operatorname{grad} V^e(x).f(x, p^e(x), e^e(x)) = 0 \tag{29}$$

a une solution $V^e : x \to V^e(x)$, avec $V^e(x) = 0$ pour tout $x \in \theta^f$, de classe C^1 sur $X \cup \theta^f$; et

(ii)

$$f_0(x, p^e(x), e\ (x)) + \operatorname{grad} V^e(x).f(x, p^e(x), e\ (x)) \leqq 0, \tag{30}$$

$$f_0(x, p\ (x), e^e(x)) + \operatorname{grad} V^e(x).f(x, p\ (x), e^e(x)) \geqq 0 \tag{31}$$

pour tous les couples stratégiques jouables (p^e, e) et (p, e^e), et pour tout $x \in X$.

Considérons d'abord une courbe connexe quelconque $\mathcal{C}$ de point initial $x^0 \in X$, contenue dans X à l'exception de son point terminal qui appartient à θ^f, et posons

$$I(x^0) \stackrel{\Delta}{=} \int_{\mathcal{C}} \operatorname{grad} V^e(x).dx,$$

où l'intégrale est calculée le long de $\mathcal{C}$.

Puisque $V^e(x) = 0$ pour $x \in \theta^f$, la valeur de cette intégrale est indépendante de la courbe $\mathcal{C}$ considérée; c'est-à-dire que

$$I(x^0) = -V^e(x^0). \tag{32}$$

De plus, d'après l'équation (29), on a

$$\int_{t_0}^{t_f^e} f_0(\tilde{x}^e(t), p^e(\tilde{x}^e(t)), e^e(\tilde{x}^e(t)))\, dt = V^e(x^0), \tag{33}$$

où $\tilde{x}^e : t \to \tilde{x}^e(t)$, $t \in [t_0, t_f^e]$ désigne la solution de l'équation d'état (1), définie sur $[t_0, t_f^e]$, pour

$$u = p^e(x), \qquad v = e^e(x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{x}^e(t_0) = x^0.$$

Désignons maintenant par $\tilde{x} : t \to \tilde{x}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, la solution de l'équation (1) définie sur $[t_0, t_f]$, pour $u = p^e(x)$, $v = e(x)$ et $\tilde{x}(t_0) = x^0$, et formons la différence entre les coûts correspondant aux deux solutions considérées :

$$\Delta \triangleq \int_{t_0}^{t_f} f_0(\tilde{x}(t), p^e(\tilde{x}(t)), e(\tilde{x}(t)))\, dt$$
$$- \int_{t_0}^{t_f^e} f_0(\tilde{x}^e(t), p^e(\tilde{x}^e(t)), e^e(\tilde{x}^e(t)))\, dt.$$

Puisque l'intégrale $I(x^0)$ ne dépend pas de la courbe $\mathcal{C}$, ajoutons

$$\int_\pi \operatorname{grad} V^e(x) . dx + V^e(x^0) = 0$$

à Δ, où π désigne le trajet complet engendré par (p^e, e) à partir de l'état initial x^0.

En remarquant que

$$\int_\pi \operatorname{grad} V^e(x) . dx = \int_{t_0}^{t_f} \operatorname{grad} V^e(\tilde{x}(t)) . f(\tilde{x}(t), p^e(\tilde{x}(t)), e(\tilde{x}(t)))\, dt$$

et en invoquant la condition (30), on voit que $\Delta \leqq 0$. Par conséquent, l'inégalité de gauche dans la condition du point en selle (3) est vérifiée par (p^e, e^e). De façon analogue, en utilisant (p, e^e) et en tenant compte de la condition (31) on peut établir que (p^e, e^e) satisfait à l'inégalité de droite dans (3). De plus, la fonction V^e est définie pour tout x appartenat à X. Par conséquent (p^e, e^e) est un couple stratégique optimal.

1.4. **Exemples.**

1.4.1. Exemple 1.

Nous considérerons ici le problème simple suivant : Un bateau est piloté dans un courant de vitesse constante S. Le joueur J_P peut imposer au bateau la vitesse relative V_P, tandis que le joueur J_E peut lui imposer la vitesse relative V_E. Ainsi la vitesse totale du bateau est $V_B = S + V_P + V_E$ (*fig.* 1.8). Le joueur J_P cherche à minimiser le temps de transfert entre un point initial donné et la rive, tandis que le joueur J_E cherche à maximiser ce temps de transfert.

Nous assimilerons la rive à une ligne droite parallèle au courant, d'équation $x_2 = l$.

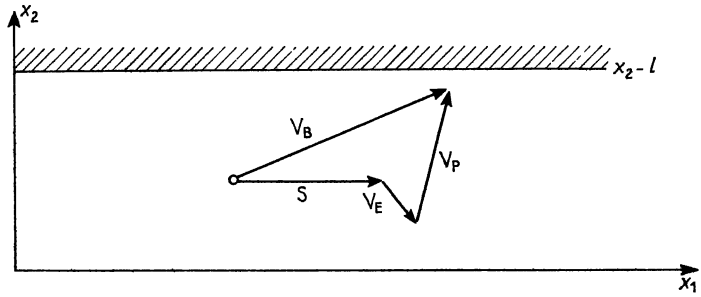

Fig. 1.8. — Problème de navigation.

Nous supposerons de plus que V_P et V_E sont astreintes à vérifier les conditions de contraintes suivantes :

$$V_P = (u_1, u_2), \qquad \text{avec} \quad u_1^2 + u_2^2 = 1;$$

$$V_E = \left(\frac{\rho + 1}{2} w, \frac{\rho - 1}{2} w\right), \qquad \text{avec} \quad |\rho| \leqq 1 \quad \text{et} \quad 0 < w = \text{Cte} < 1.$$

Les équations d'état sont donc

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = 1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = S + u_1 + \dfrac{w}{2}(\rho + 1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = u_2 + \dfrac{w}{2}(\rho - 1), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 1. \end{cases}$$

Les ensembles de contraintes sont définis par

$$(35) \qquad \begin{cases} K_u: \quad u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0, \\ K_\rho: \quad \rho^2 - 1 \leqq 0 \end{cases}$$

et la cible est

$$(36) \qquad \theta f: \quad x_2 - l = 0.$$

Le point initial donné est $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in X$, avec $X \triangleq \{x : x_2 \leqq l\}$.

Considérons l'équation (15)''. Puisque les ensembles de contraintes sont indépendants de l'état, on en déduit

$$\tilde{\lambda}_i(t) = \text{Cte} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La condition de transversalité (27) donne

$$\tilde{\lambda}_1(t_f) = \tilde{\lambda}_3(t_f) = 0,$$

d'où

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \tilde{\lambda}_3(t) \equiv 0.$$

La fonction $\mathcal{H}$ est définie par

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) = 1 + \tilde{\lambda}_2(t)\, u_2 + \tilde{\lambda}_2(t)\, \frac{w}{2} v - \tilde{\lambda}_2(t)\, \frac{w}{2}$$

et de la condition

$$\mathcal{H}(\tilde{\lambda}(t), \tilde{x}^*(t), p^*(\tilde{x}^*(t)), e^*(\tilde{x}^*(t))) = 0,$$

on déduit

$$\tilde{\lambda}_2(t) = \text{Cte} \neq 0.$$

Reportons-nous maintenant aux conditions (11)″ et (12)″. La seconde de ces conditions donne

$$\tilde{u}_2(t) = -\operatorname{sgn} \tilde{\lambda}_2(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_2(t) \equiv 1 \quad \text{ou} \quad \tilde{u}_2(t) \equiv -1,$$

d'où

$$\tilde{u}_1(t) \equiv 0.$$

La première donne

$$\tilde{v}(t) = \operatorname{sgn} \tilde{\lambda}_2(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(t) \equiv -1 \quad \text{ou} \quad \tilde{v}(t) \equiv 1.$$

Comme un couple stratégique optimal doit être jouable, nous sommes conduits à rejeter la solution correspondant à $\tilde{\lambda}_2(t) > 0$. Il reste la solution

$$(37) \qquad \begin{cases} \tilde{u}_1(t) = p_1^e(x) = 0, \\ \tilde{u}_2(t) = p_2^e(x) = 1, \\ v\ (t) = e_1^e(x) = -1. \end{cases}$$

Pour vérifier l'optimalité du couple stratégique (p^e, e^e) défini par (37), nous appliquerons les conditions suffisantes du paragraphe 1.3.6.

En intégrant les équations (34) compte tenu de (37), nous obtenons

$$V^e(x) = t_f - t = \frac{l - x_2}{1 - w}$$

qui est précisément la solution de l'équation (29) avec $V^e(x) = 0$ sur θ^f. Évidemment, cette solution est de classe C^1 pour tout x. Fina-

lement, il est facile de voir que les conditions (30) et (31) sont vérifiées; on a en effet

$$1-\frac{1}{1-w}\left[1+\frac{w}{2}(v-1)\right]\leqq 0 \qquad \text{pour} \quad |v|\leqq 1,$$

$$1-\frac{1}{1-w}(u_2-w)\geqq 0 \qquad \text{pour} \quad |u_2|\leqq 1.$$

Ainsi (37) définit bien un couple stratégique optimal, que l'on peut écrire

$$p^*(x)=(0,\ 1),$$
$$e^*(x)=-1.$$

Ce couple correspond au temps de transfert

$$V^*(x^0)=t_f^*-t_0=\frac{l-x_2^0}{1-w}.$$

1.4.2. Exemple 2.

Considérons maintenant un jeu dont les équations d'état sont

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=0, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=u+v, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=1. \end{cases}$$

Les ensembles de contraintes sont définis par

$$(39)\qquad \begin{cases} K_u: & -1\leqq u\leqq 0, \\ K_v: & -1\leqq v\leqq 0. \end{cases}$$

La cible est définie par

$$(40)\qquad \theta f:\quad x_2=0.$$

L'état initial donné est $(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)\in X$ avec $X\triangleq\{x: x_2>0\}$.
Le coût est défini par

$$(41)\qquad \int_{t_0}^{t_1}(1-x_1x_2)\,dt.$$

On a ici

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) = 1 - x_1 x_2 + \lambda_2 (u + v) + \lambda_3,$$

avec

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{d\lambda_2}{dt} = x_1, \\ \dfrac{d\lambda_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

La condition de transversalité (27) donne

$$\tilde{\lambda}_1(t_f) = \tilde{\lambda}_3(t_f) = 0,$$

d'où

$$\tilde{\lambda}_3(t) \equiv 0.$$

Des conditions (11)″-(13)″ on déduit alors

$$(43) \qquad \begin{cases} \tilde{\lambda}_2(t) > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}(t) = -1, \\ \tilde{v}(t) = 0; \end{cases} \\ \tilde{\lambda}_2(t) < 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}(t) = 0, \\ \tilde{v}(t) = -1 \end{cases} \end{cases}$$

et

$$(44) \qquad \tilde{\lambda}_2(t) = 1 - \tilde{x}_1(t)\,\tilde{x}_2(t).$$

Ainsi, le couple stratégique qui satisfait aux conditions nécessaires d'optimalité est donné par

$$(45) \qquad (p^e(x),\, e^e(x)) = \begin{cases} 0,\ -1 & \text{pour} \quad 1 - x_1 x_2 < 0, \\ -1,\ 0 & \text{pour} \quad 1 - x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

L'intégration des équations (38) avec

$$u = p^e(x), \qquad v = e^e(x)$$

donne

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= x_1^0, \\ \tilde{x}_2(t) &= t_f - t, \\ \tilde{x}_3(t) &= t, \end{aligned}$$

de telle sorte que les trajets correspondants sont rectilignes et traversent la surface de discontinuité de (p^e, e^e). Cette surface est donc une surface de transition

$$\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \stackrel{\Delta}{=} \{\, x : 1 - x_1 x_2 = 0 \,\}.$$

La valeur du jeu correspondant au couple stratégique (p^e, e^e) est

$$V^e(x) = \int_t^{t_f} (1 - \tilde{x}_1(\tau)\tilde{x}_2(\tau))\, d\tau \tag{46}$$
$$= x_2 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2$$

de telle sorte que, comme on peut d'ailleurs aussi le vérifier par intégration de (42),

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \frac{\partial V^e(\tilde{x}(t))}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\tilde{x}_2^2(t),$$
$$\tilde{\lambda}_2(t) = \frac{\partial V^e(\tilde{x}(t))}{\partial x_2} = 1 - \tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(t),$$
$$\tilde{\lambda}_3(t) = \frac{\partial V^e(\tilde{x}(t))}{\partial x_3} = 0.$$

Nous remarquons que ces composantes sont continues à la traversée de la surface de transition M^T. Cette propriété apparaît aussi comme une conséquence de la condition de saut, puisque $\frac{c_3}{c_1} = 0$.

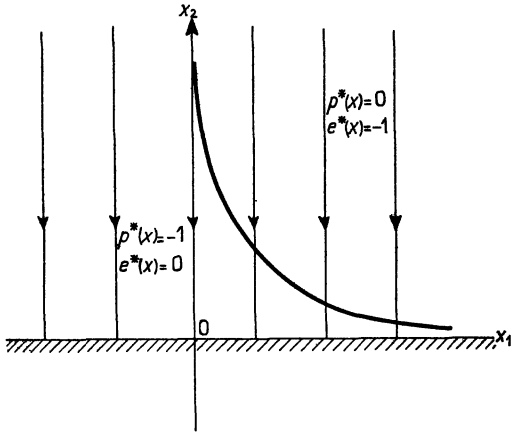

Fig. 1.9. — Couple stratégique optimal et surface de transition dans l'exemple 2.

Finalement, il est facile de voir que les conditions suffisantes sont vérifiées, ce qui montre que le couple stratégique (p^e, e^e) est optimal. $V^e(x)$ est solution de l'équation (29) et les conditions (30) et (31) sont aussi vérifiées.

Les projections des trajets optimaux et de la surface de transition, sur le plan $x_1 - x_2$, sont représentées sur la figure 1.9.

1.4.3. Exemple 3.

Nous considérerons ici le même jeu que dans l'exemple 2, avec la seule différence que le coût sera maintenant défini par

$$\int_{t_0}^{t_1} - x_1 x_2 dt. \tag{47}$$

On a alors

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) = - x_1 x_2 + \lambda_2 (u + v) + \lambda_3$$

et comme précédemment :

$$\tilde{\lambda}_2(t) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}(t) = -1, \\ \tilde{v}(t) = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}_2(t) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}(t) = 0, \\ \tilde{v}(t) = -1. \end{cases}$$

Cependant, nous avons maintenant

$$\tilde{\lambda}_2(t) = - \tilde{x}_1(t)\, \tilde{x}_2(t) = - x_1^0 \tilde{x}_2(t) \tag{48}$$

et par conséquent, puisque $\tilde{x}_2(t) > 0$, le couple stratégique qui satisfait aux conditions nécessaires est donné par

$$(p^e(x), e^e(x)) = \begin{cases} 0, & -1 \quad \text{pour} \quad x_1 > 0, \\ -1, & 0 \quad \text{pour} \quad x_1 < 0. \end{cases} \tag{49}$$

Nous remarquons que le demi-plan $m^{kl}(x) = x_1 = 0$, $x_2 \geqq 0$, est une surface neutre $M^{kl} = M^N$ pour laquelle la condition

$$\operatorname{grad} m^{kl}(x) . g^{kl}(x) = 0$$

est vérifiée pour *tout* (p^{kl}, e^{kl}). Cependant, le couple stratégique (p^{kl}, e^{kl}) n'est jouable que si $u + v < 0$. Par exemple, nous pouvons retenir

$$(p^e(x), e^e(x)) = (0, -1) \quad \text{ou} \quad (p^e(x), e^e(x)) = (-1, 0)$$

sur M^N.

En intégrant les équations (38) avec $u = p^e(x)$, $v = e^e(x)$, nous trouvons que

$$V^e(x) = - \frac{1}{2} x_1 x_2^2. \tag{50}$$

Il est facile de voir que les conditions suffisantes sont vérifiées et que, par conséquent, (p^e, e^e) est un couple stratégique optimal.

1.4.4. Exemple 4.

Le dernier exemple que nous considérerons est extrait du livre de Isaacs [15]. Il s'agit d'un problème de temps optimal pour le jeu dont les équations d'état sont

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -wu_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = v - wu_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 1. \end{cases}$$

où $w = \text{Cte} > 1$.

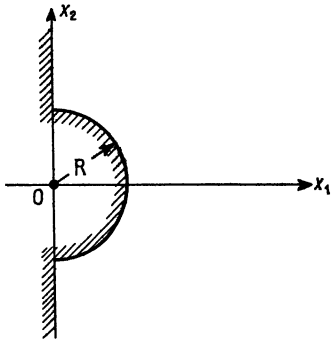

Fig. 1.10. — Projection de la cible et de X sur le plan $x_1 - x_2$.

Les ensembles de contraintes sont définis par

$$(52)\qquad \begin{cases} K_u: & 1 - u_1^2 - u_3^2 = 0, \\ K_v: & |v| \leqq 1, \end{cases}$$

La cible est définie par

$$(53)\qquad \theta^f:\quad m^f(x) = \sqrt{R^2 - x_2^2} - x_1 = 0, \qquad x_1 > 0,$$

où R est une constante donnée.

La partie débute en un point $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in X$, où X est le domaine défini par

$$x_1 > \sqrt{R_2 - x_2^2} \qquad \text{pour} \quad -R \leqq x_2 \leqq +R;$$

$$x_1 > 0 \qquad \text{pour} \begin{cases} x_2 \geqq R, \\ x_2 \leqq -R. \end{cases}$$

La projection de X sur le plan $x_1 - x_2$ est représentée sur la figure 1.10.

On a

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) = 1 - w(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) + \lambda_2 v + \lambda_3, \tag{54}$$

et

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{55}$$

d'où

$$\tilde{\lambda}_i(t) = \text{Cte} \qquad (i = 1, 2, 3,). \tag{56}$$

La condition de transversalité donne

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1(t_f) = c\,\tilde{x}_1(t_f), \\ \tilde{\lambda}_2(t_f) = c\,\tilde{x}_2(t_f), \\ \tilde{\lambda}_3(t_f) = 0, \end{cases} \tag{57}$$

où, d'après (53),

$$c^2 = \frac{\tilde{\lambda}_1^2(t_f) + \tilde{\lambda}_2^2(t_f)}{R^2}. \tag{58}$$

On a donc, d'après (56),

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1(t) \equiv c\,\tilde{x}_1(t_f), \\ \tilde{\lambda}_2(t) \equiv c\,\tilde{x}_2(t_f), \\ \tilde{\lambda}_3(t) \equiv 0. \end{cases} \tag{59}$$

Les conditions (11)″-(13)″ donnent

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(t) = \dfrac{\tilde{x}_1(t_f)}{R}\,\dfrac{c}{|c|}, \\ \tilde{u}_2(t) = \dfrac{\tilde{x}_2(t_f)}{R}\,\dfrac{c}{|c|}, \\ \tilde{v}(t) = \operatorname{sgn} c\,\tilde{x}_2(t_f). \end{cases} \tag{60}$$

Nous utiliserons ensuite la condition (iv) du paragraphe 1.2.1, c'est-à-dire

$$\operatorname{grad} m^f(x).f(x, p(x), e(x)) > 0.$$

Cette condition nous impose de choisir la racine positive dans (58), c'est-à-dire que $\frac{c}{|c|} = 1$.

En intégrant (51), on trouve que les trajets correspondant aux commandes (60) sont rectilignes, leurs projections sur le plan $x_1 - x_2$ sont données par

$$x_2(t) = a\, x_1(t) + b, \tag{61}$$

avec

$$a \triangleq \frac{\tilde{x}_2(t_f) - \frac{R}{w} \operatorname{sgn} \tilde{\lambda}_2(t)}{\tilde{x}_1(t_f)},$$

$$b \triangleq \frac{R}{w} \operatorname{sgn} \tilde{\lambda}_2(t).$$

Ainsi, par un point initial donné $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in X$ passent deux trajets complets, l'un pour $\tilde{\lambda}_2(t) > 0$ et l'autre pour $\tilde{\lambda}_2(t) < 0$ (*fig.* 1.11).

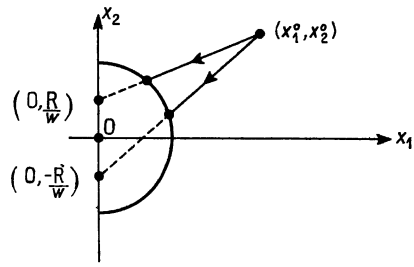

Fig. 1.11. — Projection des trajets.

Le lieu des points initiaux correspondant à la même valeur du jeu pour ces deux familles de trajets est le plan $x_1 - x_3$. Ceci s'établit simplement par intégration de la première des équations (51), qui donne

$$\tilde{x}_1(t_f) \left[1 + \frac{w}{R}(t_f - t_0) \right] = x_1^0. \tag{62}$$

Pour $(t_f - t_0)$ donné, il résulte de (62) que la valeur $\tilde{x}_1(t_f)$ doit être la même pour les deux trajets correspondant respectivement à $\tilde{\lambda}_2(t) > 0$ et $\tilde{\lambda}_2(t) < 0$.

Cette condition n'est vérifiée que pour les points initiaux du plan $x_1 - x_3$. Il s'ensuit que les trajets correspondant à $\tilde{\lambda}_2(t) > 0$ sont issus de points pour lesquels $x_2^0 > 0$, tandis que les trajets correspondant à $\tilde{\lambda}_2(t) < 0$ sont issus de points pour lesquels $x_2^0 < 0$. Il est

clair que le plan $x_1 - x_3$ est une surface répulsive M^R; cette surface est le lieu des points initiaux d'où sont issus deux trajets complets. Cette propriété est illustrée par la figure 1.12.

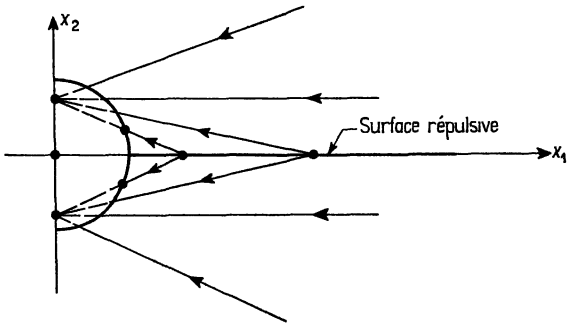

Fig. 1.12. — Projection des trajets et surface répulsive.

De (62) et (60) nous déduisons que

$$t_f - t_0 = \frac{x_1^0 - R\tilde{u}_1(t_0)}{w\tilde{u}_1(t_0)}$$

et, par suite, la valeur du jeu est

$$V^e(x) = \frac{x_1 + Rp_1^e(x)}{wp_1^e(x)},$$

avec

$$p_1^e(\tilde{x}(t)) = \tilde{u}_1(t).$$

La composante $p_1^e(x)$ peut être calculée au moyen de (60) et (61), compte tenu de la première des contraintes (52); le signe des racines est imposé par la condition $\frac{dx_1}{dt} < 0$. On aboutit finalement à l'expression suivante :

$$p_1^e(x) = \frac{-x_1(wx_2 - R) + wx_1\sqrt{(wx_2 - R)^2 + (w^2 - 1)x_1^2}}{w^2x_1^2 + (wx_2 - R)^2}$$

pour $x_2 > 0$, et

$$p_1^e(x) = \frac{x_1(wx_2 + R) + wx_1\sqrt{(wx_2 + R)^2 + (w^2 - 1)x_1^2}}{w^2x_1^2 + (wx_2 + R)^2}$$

pour $x_2 < 0$.

On pourrait voir que les conditions suffisantes sont vérifiées. Nous laissons au Lecteur le soin d'effectuer ce calcul un peu long qui ne présente pas de difficulté.

CHAPITRE II.

JEUX MULTI-ÉTAGE QUANTITATIFS.

2.1. Introduction.

Dans ce deuxième chapitre, nous considérerons un jeu quantitatif multi-étage, c'est-à-dire un jeu quantitatif dont l'état est défini par $n-1$ nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ appelées *variables d'état* et par un nombre $k \in \{0, 1, \ldots, K\}$, K entier positif, appelé *étage.*

L'*état* du jeu sera le point

$$x \stackrel{\Delta}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n,$$

avec $x_n \in \{0, 1, \ldots, K\}$.

Pour $x = x^k = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, k)$ nous dirons que l'état *est à l'étage k.*

L'évolution de l'état est régi par un système d'équations aux différences; en particulier, nous supposerons que la transition $x^k \to x^{k+1}$ dépend de x^k et de certains paramètres, les variables de commande $u_1, u_2, \ldots, u_r$ et $v_1, v_2, \ldots, v_s$, que les joueurs J_P et J_E, respectivement, choisissent pour chaque valeur de k. Soit $u \stackrel{\Delta}{=} (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ et $v \stackrel{\Delta}{=} (v_1, v_2, \ldots, v_s)$. Nous supposerons que $u \in U$ et $v \in V$ où U et V sont des domaines donnés dans E^r et E^s respectivement. A chaque changement ou transfert de l'état nous attacherons un nombre réel unique appelé *coût du transfert.*

Nous nous proposons, comme dans le cas des jeux différentiels, d'interpréter le concept d'optimalité d'un point de vue géométrique et de déduire de cette étude certaines conséquences, en particulier des conditions nécessaires d'optimalité pour une classe restreinte de problèmes. Nous supposerons, sans restreindre la généralité des raisonnements, que le jeu multi-étage considéré ici est la version discrète d'un jeu différentiel, et que l'étage k est le temps quantifié. Il est clair que les résultats obtenus seront valables même si k n'est pas le temps.

Puisque x_n prend des valeurs entières dans $[0, K]$, nous poserons

$$E_k \stackrel{\Delta}{=} \{ x : x_n = k \}.$$

Soit D un domaine donné dans E^n, tel que $G_k \stackrel{\Delta}{=} D \cap E_k \neq \emptyset$ pour $k = 0, 1, \ldots, K$.

Dans la suite, nous supposerons que l'état x appartient à l'ensemble $G \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_k G_k$, $k \in \{ 0, 1, \ldots, K \}$.

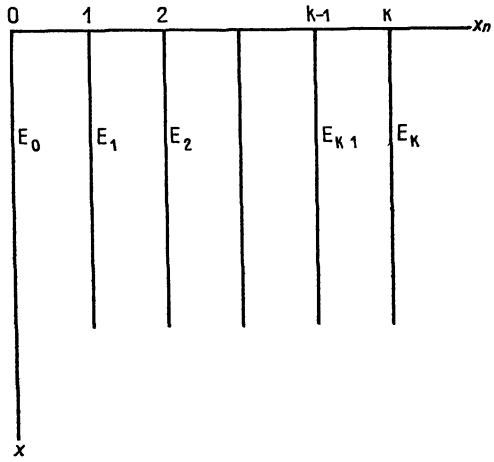

Fig. 2.1. — Espace des états et ensembles $E_0, E_1, \ldots, E_K$.

2.2. Équations d'état, stratégies et cible θ.

Nous considérerons l'état du jeu comme une fonction de l'étage k, $\tilde{x} : k \to x^k = \tilde{x}(k)$, $k \in \{ i, i+1, \ldots, j \}$, $0 \leq i \leq j \leq K$, telle que, si $i \neq j$, l'équation

$$\tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k) = f^k(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k)), \tag{1}$$

soit vérifiée pour $k = i, i+1, \ldots, j-1$, où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des fonctions de k, $\tilde{u} : k \to u = \tilde{u}(k)$, $\tilde{v} : k \to v = \tilde{v}(k)$, $k \in \{ i, i+1, \ldots, j-1 \}$, et

$$f^k(x, u, v) \stackrel{\Delta}{=} (f_1^k(x, u, v), f_2^k(x, u, v), \ldots, f_n^k(x, u, v)).$$

Puisque $x_n^k = k$, nous avons $f_n^k(x, u, v) \equiv 1$.

Nous supposerons que les fonctions f_ν^k, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, sont de classe C^1 sur $D \times U \times V$, pour $k = 0, 1, \ldots, K-1$.

Soit $R \subseteq D$ un domaine donné tel que $X_k \stackrel{\Delta}{=} R \cap E_k \neq \emptyset$ pour $k = 0, 1, \ldots, K$. Soit $X \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_k X_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$.

Les stratégies seront des fonctions de x, $p : x \to p(x)$ et $e : x \to e(x)$, $x \in X$ appartenant à des classes données, telles que $p(x) \in K_u(x) \subseteq U$, $e(x) \in K_v(x) \subseteq V$, où $K_u(x)$ et $K_v(x)$ sont des sous-ensembles donnés de U et V, respectivement, qui peuvent dépendre de x. $K_u(x)$ et $K_v(x)$ sont appelés *ensembles de contraintes.*

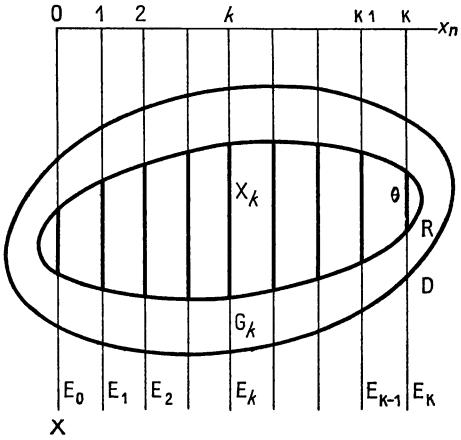

Fig. 2.2. — Ensembles X_k et G_k; $\theta = X_K$.

Nous nous intéresserons au transfert de l'état du jeu d'un point initial $\tilde{x}(i) = x^i$ à un point terminal quelconque dans l'ensemble $\theta \stackrel{\Delta}{=} X_K$.

2.3. Trajets dans l'espace des états E^n.

Étant donné une paire de stratégies (p, e) et un état initial $\tilde{x}(i) = x^i$ dans G, l'équation

$$\tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k) = f^k(\tilde{x}(k), p(\tilde{x}(k)), e(\tilde{x}(k))) \tag{2}$$

définit une suite d'états $\Gamma = \{\tilde{x}(i), \tilde{x}(i+1), \ldots, \tilde{x}(i+d)\}$, où $i + d$ est la plus grande valeur de l'étage k pour laquelle $\tilde{x}(i+d)$ est défini. Évidemment on a $i + d \leq K$.

Si $\tilde{x}(i) = x^i$ n'appartient pas à X, ou si $i = K$, $\tilde{x}(i+1)$ n'est pas défini; c'est-à-dire que $d = 0$, et Γ se réduit au seul point x^i.

Toute sous-suite π^{ij} de Γ,

$$\pi^{ij} = \{ \tilde{x}(i), \tilde{x}(i+1), \ldots, \tilde{x}(j) \} \qquad \text{où} \quad j = i + l,\ l \in \{ 0, 1, \ldots, d \}$$

est un *trajet.*

Remarquons que

$$\tilde{x}(i+m) \notin \theta, \quad \forall\, m \in \{ 0, 1, \ldots, l-1 \}$$

puisque $j \leqq K$ et $\theta \subset E_K$.

Un point $\tilde{x}(k)$, $k \in \{ 0, 1, \ldots, K \}$, est un *trajet nul* π^0.

2.4. Coût d'un transfert.

Considérons maintenant le transfert de l'état du jeu d'un point initial $\tilde{x}(i) = x^i$ à un point $\tilde{x}(j) = x^j$, le long d'un trajet π^{ij} engendré par une paire de stratégies (p, e). Nous ferons correspondre à ce transfert le coût $V(x^i, x^j, p, e, \pi^{ij})$.

Nous supposerons que :

(i) le coût du transfert de x^k à x^{k+1} le long d'un trajet non nul π^{ij} est donné par

$$f_0^k(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), v(k)), \tag{3}$$

où

$$\tilde{u}(k) = p(\tilde{x}(k)),$$
$$\tilde{v}(k) = e(\tilde{x}(k))$$

et les fonctions f_0^k sont de classe C^1 sur $D \times U \times V$ pour $k = 0, 1, \ldots, K-1$;

(ii) le coût du transfert de x^i à x^j, $j = i + l$, le long de π^{ij} est donné par

$$V(x^i, x^j, p, e, \pi^{ij}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=i}^{i+l-1} f_0^k(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k)), \tag{4}$$

(iii) le coût du transfert attaché à un trajet nul est zéro; c'est-à-dire que

$$V(x^k, x^k, p, e, \pi^0) = 0 \tag{5}$$

pour tout $k \in \{ 0, 1, \ldots, K \}$ et pour toute paire de stratégies (p, e).

2.5. Paire de stratégies jouable.

Une *partie* est l'évolution de l'état le long d'un trajet.

Une *partie complète* est une partie dont l'état final appartient à θ. Le trajet correspondant est appelé *trajet complet.*

Nous dirons que (p, e) est une *paire de stratégies jouable au point* x^i si elle engendre une partie complète à partir de l'état initial x^i. Nous désignerons par $\mathcal{J}(x^i)$ l'ensemble de toutes les paires de stratégies jouables au point x^i.

Des propriétés de l'équation aux différences (2) il résulte que toute paire de stratégies jouable au point x^i engendre une partie complète *unique* à partir de l'état initial x^i.

Nous désignerons par $\mathrm{V}(x^i, \theta; p, e)$ le coût du transfert de x^i à θ, le long du trajet complet π^{if} engendré par $(p, e) \in \mathcal{J}(x^i)$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{V}(x^i, \theta; p, e) \stackrel{\Delta}{=} V(x^i, x^f, p, e, \pi^{if}). \tag{6}$$

2.6. Paire de stratégies optimale, valeur du jeu.

Soit $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{G}$ un ensemble donné; nous dirons que la paire de stratégies (p^*, e^*) est *optimale sur* S si :

(i) $(p^*, e^*) \in \mathcal{J}(x^i)$, $\forall x^i \in \mathrm{S}$;

(ii) la condition du point en selle,

$$\mathrm{V}(x^i, \theta; p^*, e) \leqq \mathrm{V}(x^i, \theta; p^*, e^*) \leqq \mathrm{V}(x^i, \theta; p, e^*) \tag{7}$$

est vérifié pour tout $x^i \in \mathrm{S}$ et pour toutes paires de stratégies jouables $(p^*, e) \in \mathcal{J}(x^i)$ et $(p, e^*) \in \mathcal{J}(x^i)$.

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. — *Il existe une paire de stratégies* (p^*, e^*) *qui est optimale sur* X.

D'après (5), (p^*, e^*) est optimale sur $\mathrm{X}^* \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{X} \cup \theta = \bigcup_k \mathrm{X}^k$, $k \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{K}\}$.

Puisque $\mathrm{V}(x^i, \theta; p^*, e^*)$ est défini pour tout $x^i \in \mathrm{X}^*$, $\mathrm{V}^* : x^i \to \mathrm{V}^*(x^i)$, où

$$\mathrm{V}^*(x^i) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{V}(x^i, \theta; p^*, e^*) \tag{8}$$

est une fonction (univoque) sur X^*. Nous appelons $\mathrm{V}^*(x^i)$ la *valeur* du jeu au point x^i.

2.7. Surface du jeu.

Introduisons une nouvelle variable x_0, et considérons l'espace euclidien E^{n+1} de dimension $n+1$. $\mathbf{x} = (x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est le vecteur qui définit la position d'un point par rapport à un système de coordonnées rectangulaires choisi dans E^{n+1}. E^{n+1} est l'*espace des états augmenté.*

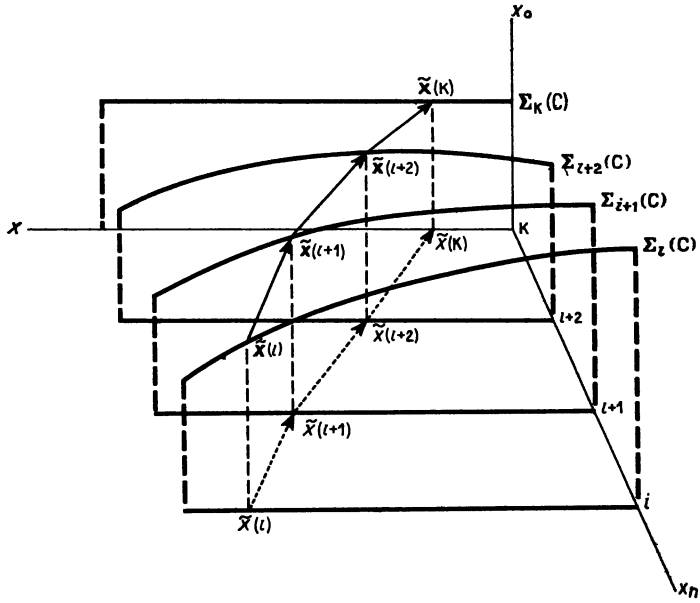

Fig. 2.3. — Surface du jeu et trajet dans E^{n+1}.

Puisque $V^* : x^t \to V^*(x^t)$ est défini sur X^*, nous pouvons définir une *surface du jeu* $\Sigma(C)$ dans $\mathbf{X}^* \triangleq X^* \times \{ x_0 \}$ par

$$\Sigma(C) \triangleq \{ \mathbf{x} : x_0 + V^*(x) = C \}, \tag{9}$$

où C est une constante arbitraire.

Quand C varie, l'équation (9) définit une famille de surfaces à un paramètre, $\{ \Sigma(C) \}$.

Pour chaque valeur de C, l'équation (9) définit une surface à une seule nappe dans $\mathbf{X}^*$; c'est-à-dire que $\Sigma(C)$ est un ensemble de points qui sont en correspondance 1-1 avec les points de X^*.

Considérons maintenant deux surfaces du jeu $\Sigma(C_1)$ et $\Sigma(C_2)$, correspondant à deux valeurs différentes du paramètre C, C_1 et C_2, respectivement. Désignons par x_{01} et x_{02} les valeurs de x_0 correspondant à $\Sigma(C_1)$ et $\Sigma(C_2)$, respectivement, pour le même état x. De (9) il résulte que

$$x_{01} - x_{02} = C_1 - C_2, \quad \forall\, x \in X^*.$$

Par conséquent, les membres de la famille à un paramètre $\{\Sigma(C)\}$ peuvent être déduits l'un de l'autre par translation parallèle à l'axe x_0. De plus ces surfaces sont ordonnées par les valeurs du paramètre C; de telle sorte qu'une augmentation du paramètre C correspond à une translation de la surface du jeu dans le sens positif de l'axe x_0. Ainsi, il passe une surface $\Sigma(C)$ et une seule par tout point donné $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{X}^*$.

Une surface du jeu donnée $\Sigma(C)$ sépare l'ensemble $\mathbf{X}^*$ en deux ensembles disjoints; c'est-à-dire en deux ensembles qui n'ont aucun point commun. Nous désignerons ces ensembles par $A/\Sigma(C)$ [« above » $\Sigma(C)$] et $B/\Sigma(C)$ [« below » $\Sigma(C)$], respectivement. Pour une surface du jeu $\Sigma(C)$ correspondant à la valeur C du paramètre, nous avons

$$A/\Sigma(C) \triangleq \{\mathbf{x} : x_0 > C - V^*(x)\}, \tag{10}$$

$$B/\Sigma(C) \triangleq \{\mathbf{x} : x_0 < C - V^*(x)\}. \tag{11}$$

Un point $\mathbf{x} \in A/\Sigma(C)$ sera appelé *point de type* A, ou plus brièvement A-*point*, relativement à $\Sigma(C)$, et un point $\mathbf{x} \in B/\Sigma(C)$ sera appelé *point de type* B, ou plus brièvement B-*point*, relativement à $\Sigma(C)$.

2.8. Une décomposition de la surface du jeu.

Définissons maintenant une surface $\Sigma_k(C)$, par

$$\Sigma_k(C) = \Sigma(C) \cap \mathcal{E}_k, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{E}_k \triangleq E_k \times \{x_0\}. \tag{12}$$

Pour $k = 0, 1, \ldots, K$,

$$\{\Sigma_0(C), \Sigma_1(C), \ldots, \Sigma_K(C)\}$$

est une décomposition de la surface du jeu $\Sigma(C)$.

Une surface $\Sigma_k(C)$, $k \in \{0, 1, \ldots, K\}$ est une surface à une seule nappe dans $\mathbf{X}_k \triangleq X_k \times \{x_0\}$, c'est-à-dire un ensemble de points qui sont en correspondance 1-1 avec les points de X_k.

Une surface $\Sigma_k(C)$, $k \in \{ 0, 1, \ldots, K \}$ sépare $\mathbf{X}_k$ en deux ensembles disjoints $A/\Sigma_k(C)$ et $B/\Sigma_k(C)$, où

$$A/\Sigma_k(C) \stackrel{\Delta}{=} (A/\Sigma(C)) \cap \mathcal{E}_k,$$
$$B/\Sigma_k(C) \stackrel{\Delta}{=} (B/\Sigma(C)) \cap \mathcal{E}_k.$$

L'équation de $\Sigma_k(C)$ se déduit de (9). Elle est

$$\Phi(\mathbf{x}) \stackrel{\Delta}{=} x_0 + V^*(x) = C, \qquad x \in X_k, \tag{13}$$

où $V^*(x)$ est la valeur du jeu au point x et, par conséquent :

$$\Sigma_k(C) = \{ \mathbf{x} = (x_0, x) : x \in X_k, \Phi(\mathbf{x}) = C \}. \tag{14}$$
$$A/\Sigma_k(C) = \{ \mathbf{x} = (x_0, x) : x \in X_k, \Phi(\mathbf{x}) > C \}, \tag{15}$$
$$B/\Sigma_k(C) = \{ \mathbf{x} = (x_0, x) : x \in X_k, \Phi(\mathbf{x}) < C \}. \tag{16}$$

Quand C varie, l'équation (13) définit une famille de surfaces à un paramètre, $\{ \Sigma_k(C) \}$.

Pour une valeur donnée de C, nous dirons que $\mathbf{x}^k \in \Sigma_k(C)$ est un *point intérieur* de $\Sigma_k(C)$ s'il existe une boule $\Delta(\mathbf{x}^k)$ de dimension n, de centre $\mathbf{x}^k$, telle que $\Delta(\mathbf{x}^k) \subset \mathbf{X}_k$.

Comme R est ouvert dans E^n, $X_k \stackrel{\Delta}{=} R \cap E_k$ est ouvert dans E_k et $\mathbf{X}_k \stackrel{\Delta}{=} X_k \times \{ x_0 \}$ est ouvert dans $E_k \times \{ x_0 \}$. Par conséquent, tout point de $\Sigma_k(C)$ est un point intérieur de $\Sigma_k(C)$, $k = 0, 1, \ldots, K$.

2.9. Trajets dans l'espace des états augmenté E^{n+1}.

Définissons les trajets $\Pi^{ts}(C)$ dans $\mathcal{G} \stackrel{\Delta}{=} G \times \{ x_0 \}$, par

$$\Pi^{ts}(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}^k : x_0^k + V(x^k, x^s, p, e, \pi^{ks}) = C, \pi^{ks} \subset \pi^{ts} \}, \tag{17}$$

où π^{ts} est un trajet dans G, de x^t à x^s, engendré par la paire de stratégies (p, e), et C une constante arbitraire.

Ainsi le trajet π^{ts} est la projection sur G des trajets $\Pi^{ts}(C)$ dans $\mathcal{G}$.

Quand C varie, l'équation (17) définit une famille de trajets à un paramètre $\{ \Pi^{ts}(C) \}$. Cette famille appartient à un cylindre de génératrices parallèles à l'axe x_0, dont l'intersection avec G est le trajet π^{ts}.

Définissons aussi trois familles de trajets issus de points de $\mathbf{X}^*$, $\{ \Pi_P^{ij}(C) \}$, $\{ \Pi_E^{lm}(C) \}$ et $\{ \Pi_{PE}^{nq}(C) \}$. Soit

$$\Pi_P^{ij}(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}^k \quad x_0^k + V(x^k, x^j, p^*, e, \pi_P^{kj}) = C, \pi_P^{kj} \subset \pi_P^{ij} \}, \tag{18}$$
$$\Pi_E^{lm}(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}^k : x_0^k + V(x^k, x^m, p, e^*, \pi_E^{km}) = C, \pi_E^{km} \subset \pi_E^{lm} \}, \tag{19}$$
$$\Pi_{PE}^{nq}(C) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}^k : x_0^k + V(x^k, x^q, p^*, e^*, \pi_{PE}^{kq} = C, \pi_{PE}^{kq} \subset \pi_{PE}^{nq} \}. \tag{20}$$

Les trajets π_P^{ij}, π_E^{lm} et π_E^{nq} sont les trajets dans G, issus des points x^i, x^l et x^n de X^*, engendrés par les paires de stratégies (p^*, e), (p, e^*) et (p^*, e^*), et de points terminaux x^j, x^m et x^q, respectivement.

Comme (p^*, e^*) est jouable en tout point $x^n \in X^*$, il existe un trajet $\Pi_{PE}^{nf}(C)$ qui ateint $\Theta \overset{\Delta}{=} \theta \times \{x_0\}$ au point $\mathbf{x}^f$. Il est appelé *trajet optimal.*

Dans la suite nous désignerons un trajet optimal par $\Pi^*(C)$.

Quand (p^*, e) et (p, e^*) sont des paires de stratégies jouables aux points x^i et x^l, respectivement, il existe aussi des trajets $\Pi_P^{if}(C)$ et $\Pi_E^{lf}(C)$ qui atteignent Θ (¹). On les appelle trajets P-*optimal* et E-*optimal*, respectivement.

Dans la suite nous désignerons ces trajets par $\Pi_P(C)$ et $\Pi_E(C)$, respectivement.

Soit maintenant

$$\tilde{x}: \quad k \to x_0 = \tilde{x}_0(k), \qquad k \in \{i, i+1, \ldots, j\}, \qquad 0 \leq i < j \leq K,$$

une fonction satisfaisant à l'équation aux différences

$$\tilde{x}_0(k+1) - \tilde{x}_0(k) = f_0^k(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k)). \tag{21}$$

pour $k = i, i+1, \ldots j-1$.

Les équations (1) et (21) forment un système de $n+1$ équations aux différences que nous écrirons sous forme vectorielle

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathrm{F}^k(\tilde{\mathbf{x}}(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k)), \tag{22}$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}}: \quad k \to \mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}(k), \qquad \mathbf{x}^k \overset{\Delta}{=} (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, k),$$
$$\tilde{\mathbf{x}} \overset{\Delta}{=} (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n),$$
$$\mathrm{F}^k(\mathbf{x}, u, v) \overset{\Delta}{=} (f_0^k(x, u, v), f_1^k(x, u, v), \ldots, f_{n-1}^k(x, u, v), 1),$$
$$\tilde{u}(k) = p(\tilde{x}(k)), \qquad \tilde{v}(k) = e(\tilde{x}(k)).$$

De la définition des trajets dans $\mathcal{G}$ il résulte que le déplacement de l'état $\mathbf{x}$ le long d'un trajet dans $\mathcal{G}$ est régi par l'équation (22), et :

(i) si les points $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ et $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ appartiennent à un trajet $\Pi_P^{ij}(C)$, on a

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathrm{F}^k(\tilde{\mathbf{x}}(k), \tilde{u}^*(k), \tilde{v}(k)); \tag{23}$$

(¹) Évidemment x^f n'est pas nécessairement le même pour ces différents trajets.

(ii) si les points $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ et $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ appartiennent à un trajet $\Pi_{\mathrm{E}}^{lm}(\mathrm{C})$, on a

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1)-\tilde{\mathbf{x}}(k)=\mathrm{F}^k(\mathbf{x}(k),\ \tilde{u}(k),\ \tilde{v}^*(k)); \tag{24}$$

(iii) si les points $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ et $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ appartiennent à un trajet $\Pi_{\mathrm{PE}}^{nq}(\mathrm{C})$, on a

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1)-\tilde{\mathbf{x}}(k)=\mathrm{F}^k(\tilde{\mathbf{x}}(k),\ \tilde{u}^*(k),\ \tilde{v}^*(k)), \tag{25}$$

où

$$\tilde{u}(k)=p(\tilde{x}(k)),\qquad \tilde{u}^*(k)=p^*(\tilde{x}(k));$$
$$\tilde{v}(k)=e(\tilde{x}(k)),\qquad \tilde{v}^*(k)=e^*(\tilde{x}(k)).$$

2.10. Quelques propriétés des surfaces du jeu et des trajets.

Nous établirons maintenant les lemmes suivants :

LEMME 1. — *Aucun point d'un trajet* $\Pi_{\mathrm{P}}^{is}(\mathrm{C}')$ *issu de* $\mathbf{x}^i$ *n'est un* A-*point relativement à la surface du jeu passant par* $\mathbf{x}^i$;

et

LEMME 2. — *Aucun point d'un trajet* $\Pi_{\mathrm{E}}^{is}(\mathrm{C}'')$ *issu de* $\mathbf{x}^i$ *n'est un* B-*point relativement à la surface du jeu passant par* $\mathbf{x}^i$.

Soit $\mathbf{x}^j=(x_0^j,\ x^j)$ un point d'un trajet $\Pi_{\mathrm{P}}^{is}(\mathrm{C}')$ engendré par $(p^*,\ e)$, et x^j sa projection sur G. Soit $\pi_{\mathrm{P}}^{ij}\subset\pi_{\mathrm{P}}^{is}$ le trajet dans G issu de x^i, engendré par $(p^*,\ e)$, et de point terminal x^j.

Remarquons d'abord que, puisque la famille de surfaces du jeu est définie sur X^*, $\mathbf{x}^j$ ne peut être un A-point relativement à un membre quelconque de la famille si $x^j\notin\mathrm{X}^*$. Par conséquent, supposons que $x^j\in\mathrm{X}^*$.

De la condition (i) du paragraphe 2.6 il résulte qu'il existe un trajet π_{PE}^{jf} issu de x^j, engendré par $(p^*,\ e^*)$, et qui atteint θ au point x^f.

De la définition des stratégies et des trajets, il résulte que $\pi_{\mathrm{P}}^{ij}\cup\pi_{\mathrm{P}}^{jf}$ est un trajet π_{P}^{if}. Soit $(p^*,\ \hat{e})$ la paire de stratégies qui engendre ce trajet [1].

Le trajet π_{P}^{if} atteint θ au point x^f, et la valeur du coût qui lui est associée est

$$\mathrm{V}(x^i,\ \theta;\ p^*,\ \hat{e})=V(x^i,\ x^f,\ p^*,\ \hat{e},\ \pi_{\mathrm{P}}^{if}). \tag{26}$$

[1] Il est facile de voir qu'il existe une paire de stratégies $(\hat{p},\ \hat{e})$ qui engendre $\pi_{\mathrm{P}}^{ij}\cup\pi_{\mathrm{PE}}^{jf}$ et que $\hat{p}=p^*$.

FONDATION UNIVERSITAIRE ... DE ... MATIQUES ... ARES ... 18 - Quai - MARTIN-D'HÈRES

De la condition du point en selle on déduit

$$(27) \qquad V(x^i, \theta; p^*, \hat{e}) \leqq V(x^i, \theta; p^*, e^*) \overset{\Delta}{=} V^*(x^i).$$

De la définition du coût il résulte que

$$(28) \quad V(x^i, x^f, p^*, \hat{e}, \pi_P^{if}) = V(x^i, x^j, p^*, e, \pi_P^{ij}) + V(x^j, x^f, p^*, e^*, \pi_{PE}^{jf}),$$

où

$$(29) \qquad V(x^j, x^f, p^*, e^*, \pi_{PE}^{jf}) \overset{\Delta}{=} V^*(x^j).$$

De (26), (27), (28) et (29) nous déduisons

$$V(x^i, x^j, p^*, e, \pi_P^{ij}) \leqq V^*(x^i) - V^*(x^j).$$

D'autre part, il résulte de (18) et de la définition du coût que

$$x_0^j - x_0^i = V(x^i, x^j, p^*, e, \pi_P^{ij})$$

et, par conséquent :

$$(30) \qquad x_0^j - x_0^i \leqq V^*(x^i) - V^*(x^j).$$

L'équation de la surface du jeu passant par $\mathbf{x}^i$ est

$$x_0 + V^*(x) = C, \qquad C = x_0^i + V^*(x^i)$$

et l'équation (30) s'écrit

$$(31) \qquad x_0^j \leqq C - V^*(x^j).$$

Finalement on déduit de (10) et (31) que $\mathbf{x}^j$ n'est pas un A-point relativement à la surface du jeu passant par $\mathbf{x}^i$, ce qui démontre le lemme 1.

Le lemme 2 peut être établi de façon analogue.

Les lemmes 1 et 2 ont les corollaires suivants :

Corollaire 1. — *Tous les points dans* $\mathbf{X}^*$ *d'un trajet* $\Pi_{PE}^{is}(C'')$ *issu de* $\mathbf{x}^i$ *appartiennent à la surface du jeu passant par* $\mathbf{x}^i$.

Ce corollaire est une conséquence directe des lemmes 1 et 2, et des définitions des points de types A et B relativement à une surface du jeu.

Corollaire 2. — *Un trajet* $\Pi_P^{is}(C')$ *dont le point initial est un* B-*point relativement à* $\Sigma(C)$ *n'a aucun* A-*point relativement à* $\Sigma(C)$ *et, évidemment, aucun point dans* $\Sigma(C)$.

COROLLAIRE 3. — *Un trajet* $\Pi_E^{is}(C'')$ *dont le point initial est un* A-*point relativement à* $\Sigma(C)$ *n'a aucun* B-*point relativement à* $\Sigma(C)$ *et, évidemment, aucun point dans* $\Sigma(C)$.

Ces corollaires sont des conséquences directes des lemmes 1 et 2, respectivement, et de la propriété de translation des surfaces du jeu dans la direction de l'axe x_0.

2.11. Ensembles Ω_P et Ω_E.

Considérons maintenant un trajet optimal $\Pi^*(C)$ issu de $\mathbf{x}^i = (x_0, x^i) \in \mathbf{X}^*$, $\mathbf{X}^* \stackrel{\Delta}{=} X^* \times \{x_0\}$, engendré par (p^*, e^*), et représenté par $\tilde{\mathbf{x}}^* : k \to \mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)$, $k \in \{i, i+1, \ldots, K\}$, $\tilde{\mathbf{x}}^* = (\tilde{x}_0^*, \tilde{x}^*) = (\tilde{x}_0^*, \tilde{x}_1^*, \ldots, x_n^*)$.

Nous établirons d'abord que

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(j) \in \mathbf{X}^*, \quad \forall j \in \{i, i+1, \ldots, K\}. \tag{32}$$

Par définition d'un trajet optimal, $\Pi^*(C)$ atteint Θ à l'étage K, et par conséquent $\tilde{\mathbf{x}}^*(K) \in \Theta \subset \mathbf{X}^*$, pour $j = K$. Si nous supposons que $\tilde{\mathbf{x}}^*(j) \notin \mathbf{X}^*$ pour $j < K$, alors $p^*(\tilde{x}^*(j))$, $e^*(\tilde{x}^*(j))$ ne sont pas définis et, par conséquent, $\tilde{\mathbf{x}}^*(k)$ n'est pas défini pour $k > j$. Comme $\tilde{\mathbf{x}}^*(k) \notin \Theta$ pour $k \leq j$, nous arrivons à une contradiction, et (32) est donc établi.

De (32) il résulte que

$$\Pi^*(C) \subset \mathbf{X}^*. \tag{33}$$

Finalement, de (33) et du corollaire 1 il résulte que $\Pi^*(C)$ appartient à la surface du jeu passant par $\mathbf{x}^i$.

Considérons maintenant les trajets non nuls $\Pi_E^{jl}(C')$ et $\Pi_P^{jm}(C'')$ issus de $\tilde{\mathbf{x}}^*(j)$, $j < K$, engendrés par les paires de stratégies (p, e^*) et (p^*, e) respectivement.

Représentons $\Pi_E^{jl}(C')$ et $\Pi_P^{jm}(C'')$ par

$$\mathfrak{X}_E : \quad k \to \mathbf{x}^k = \mathfrak{X}_E(k), \qquad k \in \{j, j+1, \ldots, l\}$$

et

$$\mathfrak{X}_P : \quad k \to \mathbf{x}^k = \mathfrak{X}_P(k), \qquad k \in \}j, j+1, \ldots, m\},$$

respectivement.

Des lemmes 1 et 2 il résulte que $\Pi_P^{jm}(C'')$ n'a pas de A-point, et $\Pi_E^{jl}(C')$ n'a pas de B-point, relativement à $\Sigma(C)$.

Puisque $\tilde{\mathbf{x}}^*(j)$ appartient à $\mathbf{X}^*$ et $j < K$, les points $\mathfrak{X}_P(j+1)$ et $\mathfrak{X}_E(j+1)$ des trajets $\Pi_P^{jm}(C'')$ et $\Pi_E^{jl}(C')$, respectivement, sont définis.

Des propriétés de ces trajets, c'est-à-dire des lemmes 1 et 2, nous déduisons que

$$\mathfrak{X}_P(j+1) \notin A/\Sigma_{j+1}(C), \tag{34}$$

$$\mathfrak{X}_E(j+1) \notin B/\Sigma_{j+1}(C). \tag{35}$$

Après ces remarques préliminaires, nous définirons les ensembles $\Omega_P(j+1)$ et $\Omega_E(j+1)$, $j = 0, 1, \ldots, K-1$. Soit

$$\Omega_P(j+1) \stackrel{\Delta}{=} \{\, \mathfrak{X}_P(j+1) \quad \text{pour toutes les paires de stratégies } (p^*, e) \,\}, \tag{36}$$

$$\Omega_E(j+1) \stackrel{\Delta}{=} \{\, \mathfrak{X}_E(j+1) \quad \text{pour toutes les paires de stratégies } (p, e^*) \,\}. \tag{37}$$

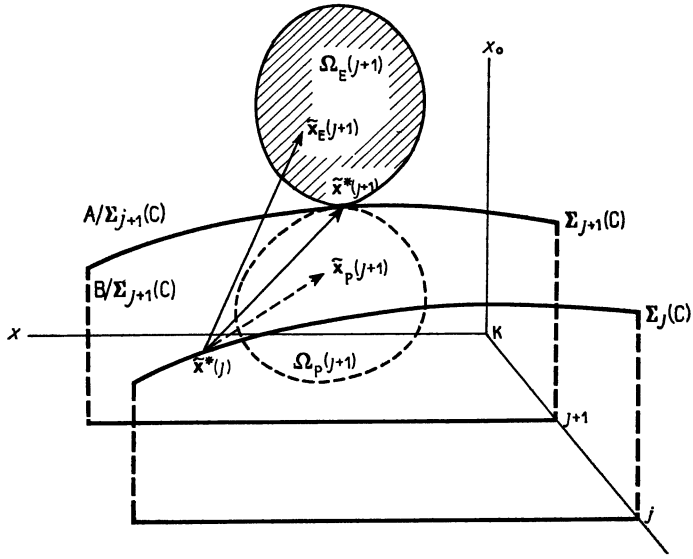

Fig. 2.4. — Ensembles Ω_P et Ω_E.

D'après (23) et (24), nous avons

$$\Omega_P(j+1) = \{\, \mathfrak{X}(j+1) : \mathfrak{X}(j+1) = \mathfrak{X}^*(j) + F^j(\mathfrak{X}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}(j)), \quad \forall\, \tilde{v}(j) \in K_v(\tilde{x}^*(j)) \,\}, \tag{38}$$

$$\Omega_E(j+1) = \{\, \mathfrak{X}(j+1) : \mathfrak{X}(j+1) = \mathfrak{X}^*(j) + F^j(\mathfrak{X}^*(j), \tilde{u}(j), \tilde{v}^*(j)), \quad \forall\, \tilde{u}(j) \in K_u(\tilde{x}^*(j)) \,\} \tag{39}$$

et de (34) et (35), comme j est arbitraire, il résulte que

$$\Omega_P(j+1) \cap (A/\Sigma_{j+1}(C)) = \emptyset \tag{40}$$

et

$$\Omega_E(j+1) \cap (B/\Sigma_{j+1}(C)) = \emptyset \tag{41}$$

pour tout $j \in \{i, i+1, \ldots, K-1\}$.

Il est clair, d'autre part, que

$$\mathfrak{X}^*(j+1) \in \Omega_P(j+1) \cap \Omega_E(j+1).$$

2.12. Convexité directionnelle.

Un ensemble S dans E^{n+1} est directionnellement convexe relativement au vecteur w^0 (on dit aussi qu'il est *x_0^+-directionnellement convexe*) si pour tout $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S$ et pour tout $\nu \in [0, 1]$ il existe un nombre γ, $-\infty < \gamma \leqq 0$, tel que

$$\mathbf{x}_1 + \nu(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) + \gamma w^0 \in S,$$

où $w^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ est le vecteur unité de l'axe x_0.

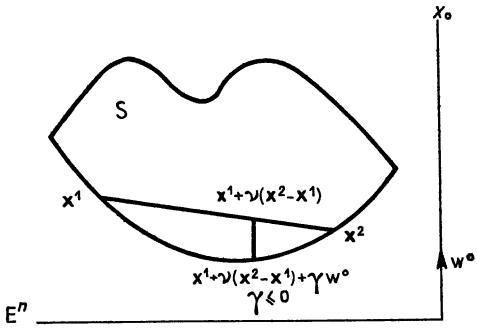

Fig. 2.5. — Convexité x_0^+-directionnelle.

S est *x_0^--directionnellement convexe* s'il est directionnellement convexe relativement au vecteur $-w^0 = (-1, 0, \ldots, 0)$.

Il est clair que la convexité directionnelle est plus faible que la convexité puisqu'un ensemble convexe dans E^{n+1} est non seulement directionnellement convexe relativement à w^0 mais aussi directionnellement convexe relativement à tout autre vecteur unité dans E^{n+1}. D'ailleurs, la convexité directionnelle relativement à un vecteur n'implique pas la convexité.

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2. — *L'ensemble $\Omega_E(j+1)$ est x_0^+-directionnellement convexe, et l'ensemble $\Omega_P(j+1)$ est x_0^--directionnellement convexe, pour $j = i, i+1, \ldots, K-1$.*

2.13. Points réguliers d'une surface $\Sigma_k(C)$.

Un point $\mathbf{x}^k$ d'une surface $\Sigma_k(C)$ est dit *régulier* s'il existe une boule $\Delta(\mathbf{x}^k)$ dans $\mathbf{X}_k$, de dimension n, de centre $\mathbf{x}^k$, telle que tout point $\hat{}^k$ de $\Sigma_k(C)$ dans $\Delta(\mathbf{x}^k)$ puisse être représenté par

$$\hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{x}^k + \varepsilon\eta^k + o(\varepsilon),$$

où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon}\right] = 0$ et η^k appartient à un sous-espace de $E_k \times \{x_0\}$ de dimension $n-1$, le plan tangent à $\Sigma_k(C)$ en $\mathbf{x}^k$.

Considérons maintenant le point $\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1)$ du trajet optimal $\Pi^*(C)$ défini au paragraphe 2.10. Comme nous l'avons établi au paragraphe 2.11, le trajet $\Pi^*(C)$ appartient à $\Sigma(C)$, et par conséquent $\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1)$ appartient à $\Sigma_{j+1}(C)$. Comme tous les points de $\Sigma_{j+1}(C)$ sont points intérieurs de $\Sigma_{j+1}(C)$, le point $\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1)$ est un point intérieur de $\Sigma_{j+1}(C)$.

Si $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^{j+1})$ est défini sur un voisinage du point $\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1)$, où

$$\mathbf{x}^{j+1} \triangleq (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, j+1)$$

et

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^{j+1}) \triangleq \left(1, \frac{\partial V^*}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V^*}{\partial x_{n-1}}, 0\right)\Bigg|_{x=x^{j+1}}$$

alors $\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1)$ est un point régulier de $\Sigma_{j+1}(C)$.

Soit

$$\tilde{\mathbf{x}}_P(j+1) = \tilde{\mathbf{x}}^*(j+1) + \delta^P\mathbf{x},$$
$$\tilde{\mathbf{x}}_E(j+1) = \tilde{\mathbf{x}}^*(j+1) + \delta^E\mathbf{x},$$

où

$$\delta^P\mathbf{x} \triangleq F^j(\tilde{\mathbf{x}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)) - F^j(\tilde{\mathbf{x}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)), \tag{42}$$

$$\delta^E\mathbf{x} \triangleq F^j(\tilde{\mathbf{x}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)) - F^j(\tilde{\mathbf{x}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)). \tag{43}$$

Puisque $\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1)$ et $\tilde{\mathbf{x}}_P(j+1)$ appartiennent à $\Omega_P(j+1)$, et puisque $\Omega_P(j+1)$ est x_0^--directionnellement convexe, alors pour tout $\nu \in [0, 1]$ il existe un nombre réel γ, $0 \leqq \gamma < +\infty$, tel que

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1) + \nu\delta^P\mathbf{x} + \gamma w^0 \in \Omega_P(j+1).$$

Puisque $\Omega_P(j+1) \cap (A/\Sigma_{j+1}(C)) = \emptyset$, nous avons

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1) + \nu\delta^P\mathbf{x} + \gamma w^0 \notin A/\Sigma_{j+1}(C),$$

ce qui implique que

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(j+1) + \nu\delta^P\mathbf{x} \notin A/\Sigma_{j+1}(C) \tag{44}$$

pour tout $\nu \in [0, 1]$.

Puisque $\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)$ est un point intérieur de $\Sigma_{j+1}(C)$, il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0, \sigma)$,

$$\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1) + \varepsilon\delta^P \mathbf{x} \in \mathbf{X}_k.$$

Alors (44) implique que

$$\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1) + \varepsilon\delta^P \mathbf{x} \in \widetilde{B/\Sigma}_{j+1}(C), \tag{45}$$

où

$$\widetilde{B/\Sigma}_{j+1}(C) \stackrel{\Delta}{=} (B/\Sigma_{j+1}(C)) \cup \Sigma_{j+1}(C).$$

De (45), (14) et (16) il résulte que

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1) + \varepsilon\delta^P \mathbf{x}) \leqq C. \tag{46}$$

Si $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^{j+1})$ est défini sur un voisinage du point $\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)$, (46) s'écrit

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)) + \operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).\varepsilon\delta^P \mathbf{x} + o(\varepsilon) \leqq C, \tag{47}$$

où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = 0$.

Puisque $\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)$ appartient à $\Sigma_{j+1}(C)$, et que, par conséquent, $\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)) = C$, (47) devient

$$\operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).\varepsilon\delta^P \mathbf{x} + o(\varepsilon) \leqq 0. \tag{48}$$

Après division par ε, qui est positif, nous obtenons

$$\operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).\delta^P \mathbf{x} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqq 0,$$

d'où, en faisant tendre ε vers zéro,

$$\operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).\delta^P \mathbf{x} \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).[F^j(\tilde{x}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)) \\ - F^j(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j))] \leqq 0.\end{aligned} \tag{49}$$

Cette relation est valable pour tout $\tilde{v}(j) \in K_v(\tilde{x}^*(j))$.

Finalement, (49) peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).F^j(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}(j)) \\ &\leqq \operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j+1)).F^j(\tilde{\mathfrak{X}}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)), \\ &\qquad \forall\, \tilde{v}(j) \in K_v(\tilde{x}^*(j)).\end{aligned} \tag{50}$$

Par un raisonnement analogue, en s'appuyant sur le fait que $\Omega_E(j+1)$ est x_0^+-directionnellement convexe, et que

$$\Omega_E(j+1) \cap (B/\Sigma_{j+1}(C)) = \emptyset,$$

on obtient

$$(51) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{grad}\Phi(\mathfrak{X}^*(j+1)).F^j(\mathfrak{X}^*(j), \tilde{u}(j), \tilde{v}^*(j)) \\ &\geqq \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}^*(j+1)).F^j(\mathfrak{X}^*(j), \tilde{u}^*(j), \tilde{v}^*(j)), \\ &\qquad \forall\, \tilde{u}(j) \in K_u(\tilde{x}^*(j)). \end{aligned}$$

2.14. Trajets optimaux réguliers.

Un trajet optimal $\Pi^*(C)$ représenté par

$$\mathfrak{X}^* : k \to \mathfrak{x}^k = \mathfrak{X}^*(k), \qquad k \in \{i, i+1, \ldots, K\}$$

est dit *régulier* si $\mathfrak{X}^*(k)$ est un point régulier de $\Sigma_k(C)$, pour tout $k \in \{i, i+1, \ldots, K-1\}$.

Rappelons que tous les points de $\Sigma_k(C)$ sont points intérieurs de $\Sigma_k(C)$; par conséquent, $\mathfrak{X}^*(k)$ est un point intérieur de $\Sigma_k(C)$, $k = i, i+1, \ldots, K$.

Représentons par $\tilde{x}^* : k \to x^k = \tilde{x}^*(k)$, $k \in \{i, i+1, \ldots, K\}$, la projection π^* de $\Pi^*(C)$ sur X^*. Comme X_k est ouvert dans E_k, $\tilde{x}^*(k)$ est un point intérieur de X_k, $k = i, i+1, \ldots, K$.

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3. — *En tout point $\tilde{x}^*(k)$, $k = i, i+1, \ldots, K-1$, il existe un voisinage $\Delta(\tilde{x}^*(k))$ de $\tilde{x}^*(k)$, dans X_k, sur lequel p^* et e^* sont de classe C^1.*

Puisque la paire de stratégies (p^*, e^*) est optimale sur X, elle est optimale sur $\Delta(\tilde{x}^*(k))$, $k = i, i+1, \ldots, K-1$.

D'après (4), et d'après la définition de la valeur du jeu, nous avons

$$(52) \qquad V^*(x^k) = \sum_{\nu=k}^{K-1} f_0^\nu(\tilde{x}(\nu), p^*(\tilde{x}(\nu)), e^*(\tilde{x}(\nu))), \quad \forall\, x^k \in \Delta(\tilde{x}^*(k)),$$

où $\tilde{x} : \nu \to x^\nu = \tilde{x}(\nu)$ est la solution de l'équation aux différences

$$\tilde{x}(\nu+1) - \tilde{x}(\nu) = f^\nu(\tilde{x}(\nu), p^*(\tilde{x}(\nu)), e^*(\tilde{x}(\nu)))$$

pour la condition initiale $\tilde{x}(k) = x^k$, définie sur $\{k, k+1, \ldots, K\}$.

Nous arrivons alors au lemme suivant :

LEMME 3. — *En tout point* $\tilde{}$ (k), $k = i, i+1, \ldots, K$, *du trajet optimal* $\Pi^*(C)$, *qui appartient à la surface du jeu* $\Sigma(C)$, $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^k)$ *est défini, où*

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^k) \triangleq \left(1, \frac{\partial V^*(x^k)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V^*(x^k)}{\partial x_{n-1}}, 0\right).$$

Pour $k = i, i+1, \ldots, K-1$, ce lemme est une conséquence directe de l'hypothèse 3, de (52), et du fait que les fonctions f_0^ν, $\nu = k, k+1, \ldots, K-1$, sont de classe C^1 sur $D \times U \times V$.

Pour $k = K$, il résulte de (5) que $V^*(x^K) = 0$ pour tout $x^K \in \theta$, et par conséquent :

$$\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^K) = (1, 0, \ldots, 0).$$

2.15. Équation variationnelle aux différences.

Considérons à nouveau les points $\tilde{\mathbf{x}}^*(k)$, $k = i, i+1, \ldots, K$, du trajet optimal $\Pi^*(C)$. Nous ferons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 4. — *La matrice* M^k,

$$M^k \triangleq \left[I + \frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)} \right],$$

où

$$\frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}} \triangleq \frac{dF^k}{d\mathbf{x}} \triangleq \frac{\partial F^k}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F^k}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F^k}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial \mathbf{x}}$$

et où I *est la matrice unité* $(n+1)\times(n+1)$, *est définie et non singulière pour* $k = i, i+1, \ldots, K-1$.

$$\frac{\partial F^k}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial f_\nu^k(\mathbf{x}^k, u, v)}{\partial x_\alpha}\right] \qquad (\nu, \alpha = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial p_\nu^*(x^k)}{\partial x_\alpha}\right] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial e^*}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial e_\nu^*(x^k)}{\partial x_\alpha}\right] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n),$$

les dérivées partielles étant calculées en

$$\mathbf{x}^k = \tilde{}^*(k), \quad u = p^*(\tilde{x}^*(k)), \quad v = e^*(\tilde{x}^*(k)) \quad (k = i, i+1, \ldots, K-1).$$

Considérons maintenant le vecteur

$$\eta^k \stackrel{\Delta}{=} (\eta_0^k, \eta_1^k, \ldots \eta_n^k) \in E^{n+1}$$

et définissons $\tilde{\eta}(k) = \eta^k$ de la manière suivante :

1. Donnons-nous le vecteur $\eta^i = \tilde{\eta}(i)$, au point initial $\tilde{\mathfrak{X}}^*(i)$ de $\Pi^*(C)$, et représentons par

$$\mathfrak{X}^i = \mathfrak{X}(i) = \tilde{}^*(i) + \varepsilon\tilde{\eta}(i) + o(\varepsilon)$$

un point d'un voisinage de $\tilde{\mathfrak{X}}^*(i)$, dans $\mathbf{X}_i$, avec $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{|o(\varepsilon)|}{\varepsilon}\right] = o$.

2. Transformons $\mathfrak{X}^i$ au moyen de l'équation d'état (22) en utilisant la paire de stratégies (p^*, e^*) qui engendre $\Pi^*(C)$.

L'équation d'état peut être écrite sous la forme

$$(53) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}(k+1) - \tilde{\mathfrak{X}}(k) = F^k(\mathfrak{X}(k).\ p^*(\tilde{x}(k)),\ e^*(\tilde{x}(k))) \\ \qquad k = i,\ i+i,\ \ldots,\ K-1). \end{cases}$$

On en déduit simplement

$$(54) \quad \mathfrak{X}(i+1) = \tilde{\mathfrak{X}}^*(i+1) + \varepsilon\left[I + \frac{dF^i(\mathbf{x}^i, p^*(x^i), e^*(x^i))}{d\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^i = \tilde{\mathbf{x}}^*(i)}\right]\tilde{\eta}(i) + o(\varepsilon)$$

ou

$$(55) \qquad \mathfrak{X}(i+1) = \tilde{}^*(i+1) + \varepsilon M^i\tilde{\eta}(i) + o(\varepsilon).$$

Posons

$$\tilde{\eta}(i+1) = \eta^{i+1} \stackrel{\Delta}{=} M^i\tilde{\eta}(i),$$

il vient

$$(56) \qquad \mathfrak{X}(i+1) = \tilde{\mathfrak{X}}^*(i+1) + \varepsilon\tilde{\eta}(i+1) + o(\varepsilon).$$

De même, si

$$(57) \qquad \mathfrak{X}(k) = \tilde{\mathfrak{X}}^*(k) + \varepsilon\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon),$$

on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(k+1) &= \tilde{\mathfrak{X}}^*(k+1) + \varepsilon\left[I + \frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)}\right]\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon) \\ &= \tilde{\mathfrak{X}}^*(k+1) + \varepsilon M^k\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{\eta}(k+1) = \eta^{k+1} \stackrel{\Delta}{=} M^k\tilde{\eta}(k),$$

il vient

$$(58) \qquad \mathfrak{X}(k+1) = \tilde{\mathfrak{X}}^*(k+1) + \varepsilon\tilde{\eta}(k+1) + o(\varepsilon).$$

Finalement, on a

$$(59)\quad \begin{cases} \tilde{\eta}(k+1)-\tilde{\eta}(k) = \left[\dfrac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}}\Bigg|_{\mathbf{x}^k=\tilde{\mathbf{x}}^*(k)}\right]\tilde{\eta}(k) \\ (k=i,\ i+1,\ \ldots,\ \mathrm{K}-1). \end{cases}$$

L'équation (59) est l'*équation variationnelle aux différences.*

Remarquons que $f_n^k(x^k, u, v) \equiv 1$ et que, par conséquent :

$$\tilde{\eta}_n(k+1)-\tilde{\eta}_n(k) = 0,$$

d'où il s'ensuit que

$$(60)\qquad \tilde{\eta}_n(i) = \tilde{\eta}_n(i+1) = \ldots = \tilde{\eta}_n(\mathrm{K}) = \mathrm{Cte}.$$

2.16. Transformation linéaire et son inverse.

Étant donné $\tilde{\eta}(i) = \eta^i$, nous avons

$$\tilde{\eta}(k+1) = \mathrm{M}^k\tilde{\eta}(k) = \mathrm{M}^k(\mathrm{M}^{k-1}\tilde{\eta}(k-1)) = \mathrm{M}^k\mathrm{M}^{k-1}\ldots\mathrm{M}^i\tilde{\eta}(i).$$

Posons

$$\mathrm{A}^k \triangleq \mathrm{M}^k\mathrm{M}^{k-1}\ldots\mathrm{M}^i \qquad (k=i,\ i+1,\ \ldots,\ \mathrm{K}-1).$$

Comme les matrices M^k, $k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}-1$, sont supposées non singulières, les matrices A^k, $k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}-1$, sont non singulières. Par conséquent, la transformation linéaire

$$(61)\qquad \tilde{\eta}(k+1) = \mathrm{A}^k\tilde{\eta}(i) \qquad (k=i,\ i+1,\ \ldots,\ \mathrm{K}-1)$$

est non singulière. Son inverse existe donc, et nous avons

$$\tilde{\eta}(i) = (\mathrm{A}^k)^{-1}\tilde{\eta}(k+1).$$

Si l'on se donne $\tilde{\eta}(\mathrm{K}) = \eta^{\mathrm{K}}$, on a

$$\tilde{\eta}(i) = (\mathrm{A}^{\mathrm{K}-1})^{-1}\tilde{\eta}(\mathrm{K})$$

et

$$\tilde{\eta}(k) = \mathrm{A}^{k-1}\tilde{\eta}(i) = \mathrm{A}^{k-1}(\mathrm{A}^{\mathrm{K}-1})^{-1}\tilde{\eta}(\mathrm{K}),$$

avec

$$\mathrm{A}^{i-1} \triangleq \mathrm{I}.$$

Posons

$$\mathcal{A}^k \triangleq \mathrm{A}^{k-1}(\mathrm{A}^{\mathrm{K}-1})^{-1},$$

avec

$$\mathcal{A}^i \triangleq (\mathrm{A}^{\mathrm{K}-1})^{-1}.$$

On a alors la transformation linéaire inverse

$$(62)\qquad \tilde{\eta}(k) = \mathcal{A}^k\tilde{\eta}(\mathrm{K}) \qquad (k=i,\ i+1,\ \ldots,\ \mathrm{K}-1).$$

2.17. Quelques propriétés des transformations A^k et $\mathcal{A}^k$.

Soit $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$ un hyperplan donné, de dimension γ, $1 \leq \gamma \leq n$, passant par le point initial $\tilde{\mathfrak{X}}^*(i)$ de $\Pi^*(C)$. Nous nous intéresserons au transformé $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$ de $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$ dans la transformation linéaire A^{k-1}.

LEMME 4. — *Le transformé* $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$ *d'un plan* $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$ *passant par le point* $\tilde{\mathfrak{X}}^*(i)$ *du trajet optimal* $\Pi^*(C)$, *dans la transformation linéaire* A^{k-1}, *a les propriétés suivantes :*

(*a*) $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$ *est défini pour* $k = i, i+1, \ldots, K$;

(*b*) $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$ *est un plan de même dimension que* $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$.

Puisque $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$ est un plan de dimension γ, il existe une base dans $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$, c'est-à-dire un système de γ vecteurs $e_\nu(i)$, $\nu = 1, 2, \ldots, \gamma$, linéairement indépendants, et tout vecteur non nul η^i du plan $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i)$ est de la forme

$$\eta^i = \tilde{\eta}(i) = \sum_{\nu=1}^{\gamma} c_\nu e_\nu(i),$$

où les c_ν sont des constantes non toutes nulles.

Soit $e_\nu(k)$ le transformé de $e_\nu(i)$, $\nu = 1, 2, \ldots, \gamma$, dans la transformation A^{k-1}. On a

$$e_\nu(k) = A^{k-1} e_\nu(i) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \gamma).$$

Puisque les vecteurs $e_\nu(i)$, $\nu = 1, 2, \ldots, \gamma$, sont linéairement indépendants, et puisque A^{k-1} est non singulière, les vecteurs $e_\nu(k)$, $\nu = 1, 2, \ldots, \gamma$, sont aussi linéairement indépendants.

Par définition, le transformé de $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i))$ est

$$P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k)) \stackrel{\Delta}{=} \{ \eta^k = \tilde{\eta}(k) : \tilde{\eta}(k) = A^{k-1}\tilde{\eta}(i), \forall\, \eta^i = \tilde{\eta}(i) \in P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(i)) \}.$$

Tout vecteur η^k de $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$ est de la forme

$$\eta^k = \tilde{\eta}(k) = A^{k-1}\tilde{\eta}(i) = A^{k-1}\left(\sum_{\nu=1}^{\gamma} c_\nu e_\nu(i)\right)$$

et puisque A^{k-1} est linéaire, on a

$$\eta^k = \sum_{\nu=1}^{\gamma} c_\nu A^{k-1} e_\nu(i) = \sum_{\nu=1}^{\gamma} c_\nu e_\nu(k).$$

Il s'ensuit que $P(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$, $k = i, i+1, \ldots, K$, est défini et que sa dimension est γ, ce qui établit le lemme 4.

Par un raisonnement analogue utilisant les propriétés de la transformation inverse $\mathfrak{A}^k$, on prouverait de même le lemme suivant :

LEMME 5. — *Le transformé* $P(\tilde{\mathbf{x}}^*(k))$ *d'un plan* $P(\tilde{\mathbf{x}}^*(K))$ *passant par le point* $\tilde{\mathbf{x}}^*(K)$ *du trajet optimal* $\Pi^*(C)$, *dans la transformation linéaire* $\mathfrak{A}^k$, *a les propriétés suivantes :*

(*a*) $P(\tilde{\mathbf{x}}^*(k))$ *est défini pour* $k = i, i+1, \ldots, K$;

(*b*) $P(\tilde{\mathbf{x}}^*(k))$ *est un plan de même dimension que* $P(\tilde{\mathbf{x}}^*(K))$.

2.18. Transformation d'un plan tangent.

Puisque, d'après le lemme 3, grad $\Phi(\mathbf{x}^k)$ est défini en tout point $\tilde{\mathbf{x}}^*(k)$, $k = i, i+1, \ldots, K-1$, $\Pi^*(C)$ est un trajet optimal régulier dans $\Sigma(C)$. Considérons un voisinage de $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$ dans $\Sigma_i(C)$, soit

$$\Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(i)) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}^i : \mathbf{x}^i = \tilde{\mathbf{x}}(i) \in \Sigma_i(C) \},$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}}(i) = \tilde{\mathbf{x}}^*(i) + \varepsilon\eta^i + o(\varepsilon)$$

et

1. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[\dfrac{\| o(\varepsilon) \|}{\varepsilon} \right] = 0$;

2. $\eta^i \in P_{\Sigma_i}(\mathbf{x}^*(i))$, le plan tangent à $\Sigma_i(C)$ en $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$, qui est un plan de dimension $n-1$ dans $E_i \times \{ x_0 \}$.

Nous transformerons $\Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$ de l'étage i à l'étage k au moyen de l'équation d'état (22) de la façon suivante :

A un point $\mathbf{x}^i = (x_0, x^i)$ de $\Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$ nous associerons le trajet optimal $\hat{\Pi}^*(C)$ qui est issu de $\mathbf{x}^i$ et qui est engendré par la paire de stratégies (p^*, e^*). Cette paire de stratégies engendre d'ailleurs le trajet $\Pi^*(C)$ à partir de $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$. Le transformé de $\Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$ est alors

$$\Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(k)) \stackrel{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}(k) : \tilde{\mathbf{x}}(k) \in \hat{\Pi}^*(C), \forall \mathbf{x}^i \in \Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(i)) \}.$$

D'après (58), nous avons

$$\Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(k)) = \{ \mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}(k) : \tilde{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}^*(k) + \varepsilon\,\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon) \},$$

où $\tilde{\eta}$ est solution de l'équation variationnelle (59) pour la condition initiale $\tilde{\eta}(i) = \eta^i$; c'est-à-dire que $\eta(k) = A^{k-1}\eta^i$.

Puisque la condition (33) est valable pour tout trajet optimal, nous avons $\Pi^*(C) \in \mathbf{X}^*$ pour tout $\mathbf{x}^i \in \Delta(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$. Il résulte du corollaire 1 que

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}^*(k) + \varepsilon\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon) \in \Sigma_k(C),$$

où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[\dfrac{\| o(\varepsilon) \|}{\varepsilon} \right] = 0.$

Par conséquent :

$$\Phi(\tilde{\mathfrak{x}}^*(k) + \varepsilon\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon)) = C. \tag{63}$$

Puisque $\tilde{\mathfrak{x}}^*(k)$ appartient à $\Sigma_k(C)$ et qu'en conséquence $\Phi(\tilde{\mathfrak{x}}^*(k)) = C$, (63) peut être mis sous la forme

$$\operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{x}}^*(k)).(\varepsilon\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon)) + o(\|\varepsilon\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon)\|) = o, \tag{64}$$

où grad $\Phi(\tilde{\mathfrak{x}}^*(k))$ désigne le vecteur grad $\Phi(\mathfrak{x}^k)$ au point $\tilde{\mathfrak{x}}^*(k)$.

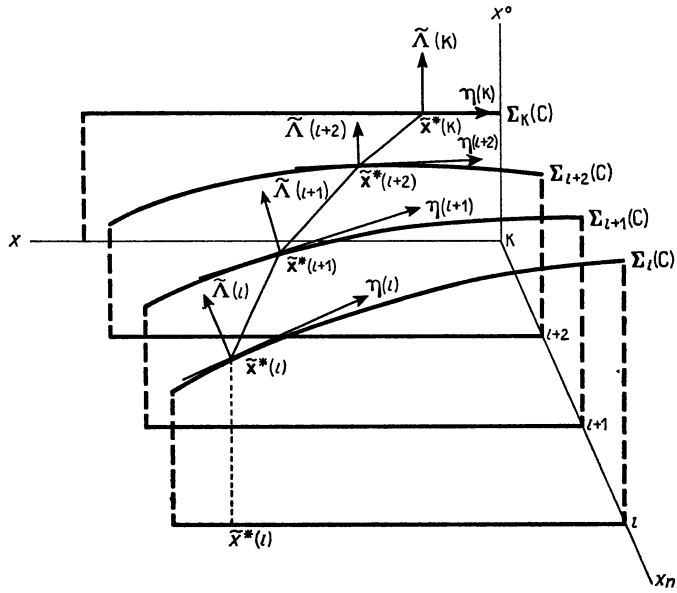

Fig. 2.6. — Transformation du plan tangent.

(64) peut être écrit plus simplement

$$\varepsilon \operatorname{grad}\Phi(\tilde{\mathfrak{x}}^*(k)).\tilde{\eta}(k) + o(\varepsilon) = o,$$

où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = o.$

Divisant l'égalité précédente par ε, et faisant tendre ε vers zéro, nous obtenons

$$\operatorname{grad}\Phi(\tilde{}^*(k)).\tilde{\eta}(k) = o. \tag{65}$$

De plus, il résulte de (60), et du fait que η^l appartient à $E_l \times \{x_0\}$, que $\tilde{\eta}(k)$ appartient à $E_k \times \{x_0\}$.

Puisque $\eta^i \in P_{\Sigma_i}(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$ et puisque A^{k-1} est une transformation linéaire non singulière, la condition (65) conduit au lemme suivant :

LEMME 6. — *Si les hypothèses* 3 *et* 4 *sont vérifiées, le transformé du plan tangent à* $\Sigma_i(C)$ *en* $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$, *dans la transformation linéaire* A^{k-1}, *est le plan tangent* $P_{\Sigma_k}(\tilde{\mathbf{x}}^*(k))$ *à* $\Sigma_k(C)$ *en* $\tilde{\mathbf{x}}^*(k)$; *c'est-à-dire que*

$$P_{\Sigma_k}(\tilde{\mathbf{x}}^*(k)) = A^{k-1} P_{\Sigma_i}(\tilde{\mathbf{x}}^*(i)) \qquad \text{pour} \quad k = i, i+1, \ldots, K.$$

2.19. Équations adjointes.

Soit maintenant $\tilde{\Lambda}(k) \overset{\Delta}{=} (\tilde{\lambda}_0(k), \tilde{\lambda}_1, (k), \ldots \tilde{\lambda}_n(k) \in E^{n+1}$, $k = i, i+1, \ldots, K$, satisfaisant aux équations adjointes

$$(66) \quad \tilde{\Lambda}(k+1) - \tilde{\Lambda}(k) = -\left[\frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)}\right]^T \tilde{\Lambda}(k+1)$$

pour $k = i, i+1, \ldots, K-1$.

Comme les matrices

$$\left[I + \frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)}\right] \qquad (k = i, i+1, \ldots, K-1),$$

sont supposées non singulières, il en va de même des matrices

$$\left[I + \frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)}\right]^T$$

Par conséquent leurs inverses existent, et l'on déduit de (66),

$$(67) \quad \tilde{\Lambda}(k+1) = \left\{\left[I + \frac{dF^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k))}{d\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)}\right]^T\right\}^{-1} \tilde{\Lambda}(k)$$

pour $k = i, i+1, \ldots, K-1$.

De l'équation (67) et de l'équation variationnelle (59) on déduit que

$$(68) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\lambda}_\nu(i)\tilde{\eta}_\nu(i) = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\lambda}_\nu(i+1)\tilde{\eta}_\nu(i+1) = \ldots = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{\lambda}_\nu(K)\tilde{\eta}_\nu(K) = \text{Cte}$$

ou, sous forme vectorielle,

$$(69) \qquad \tilde{\Lambda}(i).\tilde{\eta}(i) = \tilde{\Lambda}(i+1).\tilde{\eta}(i+1) = \ldots = \tilde{\Lambda}(K).\tilde{\eta}(K) = \text{Cte}.$$

Comme x_0 et x_n ne figurent pas dans les arguments de

$$F^k(\mathbf{x}^k, p^*(x^k), e^*(x^k)), \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1,$$

il résulte de (66) que

$$\tilde{\lambda}_0(k+1) - \tilde{\lambda}_0(k) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\lambda}_n(k+1) - \tilde{\lambda}_n(k) = 0$$

pour $k = i, i+1, \ldots, K-1$.

Il s'ensuit que

$$\tilde{\lambda}_0(i) = \tilde{\lambda}_0(i+1) = \ldots = \lambda_0(\text{K}) = \text{Cte}, \tag{70}$$

$$\tilde{\lambda}_n(i) = \tilde{\lambda}_n(i+1) = \ldots = \tilde{\lambda}_n(\text{K}) = \text{Cte}, \tag{71}$$

Nous pouvons tirer de (68) la conclusion suivante : si les vecteurs initiaux $\lambda^i = \tilde{\lambda}(i)$ et $\eta^i = \tilde{\eta}(i)$ sont choisis de telle sorte que

$$\lambda^i . \eta^i = 0, \qquad \text{avec} \quad \| \lambda^i \| \, \| \eta^i \| \neq 0,$$

c'est-à-dire si λ^i est perpendiculaire à η^i, alors

$$\tilde{\lambda}(k) . \tilde{\eta}(k) = 0 \qquad (k = i, i+1, \ldots, \text{K}). \tag{72}$$

Évidemment, on a $\| \tilde{\lambda}(k) \| \, \| \tilde{\eta}(k) \| \neq 0$. Par suite, $\tilde{\lambda}(k)$ est perpendiculaire à $\tilde{\eta}(k)$ en tout point de $\Pi^*(\text{C})$.

De même, si $\text{P}(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$ est un plan de dimension $n - 1$, passant par le point initial $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$ de $\Pi^*(\text{C})$, et si on choisit $\lambda^i = \tilde{\lambda}(i)$ perpendiculaire à ce plan, alors $\tilde{\lambda}(k)$ est perpendiculaire au transformé

$$\text{P}(\tilde{}^*(k)) = \text{A}^{k-1} \text{P}(\tilde{\mathbf{x}}^*(i)), \tag{73}$$

de $\text{P}(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$, dans la transformation linéaire A^{k-1}, $k = i, i+1, \ldots, \text{K}$.

Finalement, de (72) et du lemme 6 on déduit que si $\lambda^i = \tilde{\lambda}(i)$ est perpendiculaire au plan tangent de $\Sigma_i(\text{C})$ en $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$, alors $\lambda(k)$ est perpendiculaire au plan tangent de $\Sigma_k(\text{C})$ en $\tilde{\mathbf{x}}^*(k)$, pour $k = i$, $i+1, \ldots, \text{K}$.

2.20. Gradient et vecteur adjoint.

La composante sur l'axe x_0 et la composante sur l'axe x_n de $\tilde{\lambda}(k)$ sont des constantes. Par conséquent, si nous choisissons $\tilde{\lambda}_0(i) = 1$ et $\tilde{\lambda}_n(i) = 0$, nous avons $\tilde{\lambda}_0(k) = 1$ et $\tilde{\lambda}_n(k) = 0$ pour $k = i, i+1, \ldots, \text{K}$.

De plus, si nous choisissons $\tilde{\lambda}(i)$ perpendiculaire au plan tangent $\text{P}_{\Sigma_i}(\tilde{\mathbf{x}}^*(i))$ de $\Sigma_i(\text{C})$ en $\tilde{\mathbf{x}}^*(i)$, $\tilde{\lambda}(k)$ est perpendiculaire au plan tangent $\text{P}_{\Sigma k}(\tilde{\mathbf{x}}^*(k))$ en $\tilde{\mathbf{x}}^*(k)$, pour $k = i, i+1, \ldots, \text{K}$.

Il est clair que ces choix impliquent que $\tilde{\lambda}(i) = \text{grad}\, \Phi(\mathbf{x}^i)$ au point $\mathbf{x}^i = \tilde{\mathbf{x}}^*(i)$.

Comme $\tilde{\lambda}(k)$ et $\text{grad}\, \Phi(\mathbf{x}^k)$ au point $\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)$:

(i) appartiennent à $\text{E}_k \times \{ x_0 \}$;

(ii) ont leurs composantes sur l'axe x_0 égales à 1;

(iii) sont perpendiculaires à $P_{\Sigma k}(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k))$ pour $k = i, i+1, \ldots, K$, on a

$$\tilde{\lambda}(k) = \operatorname{grad}\Phi(\mathbf{x}^k) \quad \text{au point } \mathbf{x}^k = \tilde{\mathfrak{X}}^*(k) \tag{74}$$

pour $k = i, i+1, \ldots, K$.

On déduit alors de (50) que

$$\tilde{\lambda}(k+1).F^k(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k), \tilde{u}^*(k), \tilde{v}(k)) \leqq \tilde{\lambda}(k+1).F^k(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k), \tilde{u}^*(k), \tilde{v}^*(k)), \quad \forall\, \tilde{v}(k) \in K_v(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k)) \tag{75}$$

pour $k = i, i+1, \ldots, K-1$, et de (51) on déduit de même que

$$\tilde{\lambda}(k+1).F^k(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}^*(k)) \geqq \tilde{\lambda}(k+1).F^k(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k), \tilde{u}^*(k), \tilde{v}^*(k)), \quad \forall\, \tilde{u}(k) \in K_u(\tilde{\mathfrak{X}}^*(k)) \tag{76}$$

pour $k = i, i+1, \ldots, K-1$, où

$$\tilde{\mathfrak{X}}^*(k) \triangleq (\tilde{x}_0^*(k), \tilde{x}^*(k)) \in \Pi^*(C)$$

et

$$\tilde{u}^*(k) = p^*(\tilde{x}^*(k)),$$
$$\tilde{v}^*(k) = e^*(\tilde{x}^*(k))$$

2.21. Conditions de transversalité.

Au point terminal $\tilde{\mathfrak{X}}^*(K)$ du trajet optimal $\Pi^*(C)$, on a

$$\tilde{\lambda}(K).\tilde{\eta}(K) = 0, \quad \forall\, \tilde{\eta}(K) \in P_{\Sigma_K}(\tilde{\mathfrak{X}}^*(K)).$$

L'intersection de la surface du jeu $\Sigma(C)$ et de Θ est

$$\Theta \cap \Sigma(C) = \{\mathbf{x} : \Phi(\mathbf{x}) = C,\ x \in \theta\}.$$

D'après (5), la condition $x \in \theta$ implique que

$$\Phi(\mathbf{x}) \triangleq x_0 + V^*(x) = x_0.$$

Par conséquent, on a

$$\Theta \cap \Sigma(C) = \{\mathbf{x} : x_0 = C,\ x \in \theta\}.$$

Il s'ensuit que $\Theta \cap \Sigma(C)$ se déduit de θ par translation parallèle à l'axe x_0, et puisque $\theta \triangleq X_K \triangleq R \cap E_K^{\cdot}$, $P_K(\tilde{\mathfrak{X}}^*(K))$ est un plan de dimension $n-1$ perpendiculaire à l'axe x_0.

Il s'ensuit que

$$\tilde{\lambda}_1(K) = \ldots = \lambda_{n-1}(K) = \tilde{\lambda}_n(K) = 0 \tag{77}$$

au point terminal de $\Pi^*(C)$.

Ces conditions sont appelées *conditions de transversalité terminales.*

2.22. Un théorème min-max.

Posons

$$\mathcal{H}^{k+1}(\tilde{\lambda}(k+1), \tilde{\mathbf{x}}^*(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k)) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\lambda}(k+1).\mathrm{F}^k(\tilde{\mathbf{x}}^*(k), \tilde{u}(k), \tilde{v}(k))$$

pour $k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}-1$.

Les résultats des précédents paragraphes se trouvent rassemblés dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\Pi^*(\mathrm{C})$ *un trajet optimal engendré par la paire de stratégies* (p^*, e^*), *représenté par* $\tilde{\mathbf{x}}^* : k \to \mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{x}}^*(k)$, *et soit* π^* *sa projection sur* X^* *représentée par* $\tilde{x}^* : k \to x^k = \tilde{x}^k(k)$, $k \in \{i, i+i, \ldots, \mathrm{K}\}$. *Si les hypothèses* 1-4 *sont vérifiées, alors il existe des vecteurs non nuls* $\tilde{\lambda}(k)$, $k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}$ *qui satisfont à l'équation adjointe* (66), *et qui sont tels que*

$$(a) \qquad \min_{\tilde{u}(k) \in \mathrm{K}_u(\tilde{x}^*(k))} \mathcal{H}^{k+1}(\tilde{\lambda}(k+1), \tilde{\mathbf{x}}^*(k), \tilde{u}(k), e^*(\tilde{x}^*(k)))$$
$$= \max_{\tilde{v}(k) \in \mathrm{K}_v(\tilde{x}^*(k))} \mathcal{H}^{k+1}(\tilde{\lambda}(k+1), \tilde{\mathbf{x}}^*(k), p^*(\tilde{\mathbf{x}}^*(k)), \tilde{v}(k))$$
$$= \mathcal{H}^{k+1}(\tilde{\lambda}(k+1), \tilde{\mathbf{x}}^*(k), p^*(\tilde{x}^*(k)), e^*(\tilde{x}^*(k)))$$
$$\text{pour} \quad k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}-1;$$

$$(b) \qquad \tilde{\lambda}_0(i) = \tilde{\lambda}_0(i+1) = \ldots = \tilde{\lambda}_0(\mathrm{K}) > 0;$$

$$(c) \qquad \tilde{\lambda}_n(i) = \tilde{\lambda}_n(i+1) = \ldots = \tilde{\lambda}_n(\mathrm{K}) = 0;$$

$$(d) \qquad \tilde{\lambda}_1(\mathrm{K}) = \ldots = \tilde{\lambda}_{n-1}(\mathrm{K}) = \tilde{\lambda}_n(\mathrm{K}) = 0.$$

2.23. Contraintes.

Supposons maintenant que les ensembles de contraintes $\mathrm{K}_u(x^k)$ et $\mathrm{K}_v(x^k)$ soient donnés sous la forme

$$(78) \qquad \begin{cases} \varphi_\alpha^k(x^k, u) \leqq 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \\ \psi_\alpha^k(x^k, v) \leqq 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, l) \end{cases}$$

respectivement.

Supposons de plus que

(*a*) φ_α^k et ψ_α^k sont de classe C^1 sur $\mathrm{G}_k \times \mathrm{U}$ et $\mathrm{G}_k \times \mathrm{V}$, respectivement, pour $k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}$;

(*b*) si $m > r$ et $l > s$, alors au plus r des $\varphi_\alpha^k(x^k, u)$ et s des $\psi_\alpha^k(x^k, v)$ s'annulent en un point de $\mathrm{G}_k \times \mathrm{U}$ et de $\mathrm{G}_k \times \mathrm{V}$, respectivement, pour $k = i, i+1, \ldots, \mathrm{K}$;

(c) les matrices

$$\left[\frac{\partial \varphi_j^k(x^k, u)}{\partial u_\sigma}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, m' \leqq r;\ \sigma = 1, 2, \ldots, r)$$

et

$$\left[\frac{\partial \psi_j^k(x^k, v)}{\partial v_\sigma}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, l' \leqq s;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

formées à partir des composantes nulles des $\varphi_\alpha^k(x^k, u)$ et $\psi_\alpha^k(x^k, v)$ respectivement, ont le rang maximal, pour $k = i, i+1, \ldots, K$.

Supposons que

$$\varphi_\alpha^k(x^k, p^*(x^k)) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m' \leqq m),$$
$$\psi_\alpha^k(x^k, e^*(x^k)) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, l' \leqq l)$$

en $x^k = x^*(k)$.

A partir de la condition (a) du théorème 1, la règle des multiplicateurs de Lagrange donne

$$(79) \qquad \begin{cases} \tilde{\Lambda}^T(k+1)\dfrac{\partial F^k}{\partial u} + \tilde{\mu}^T(k)\dfrac{\partial \varphi^k}{\partial u} = 0, \\ \tilde{\Lambda}^T(k+1)\dfrac{\partial F^k}{\partial v} + \tilde{\nu}^T(k)\dfrac{\partial \psi^k}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

où $\tilde{\Lambda}^T$, $\tilde{\mu}^T$ et $\tilde{\nu}^T$ sont les vecteurs lignes

$$\tilde{\Lambda}^T \triangleq (\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n),$$

$$\tilde{\mu}^T \triangleq (\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \ldots \tilde{\mu}_{m'} 0 \ldots 0) \qquad \text{avec} \quad \tilde{\mu}_i(k) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m'),$$
$$\tilde{\nu}^T \triangleq (\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 \ldots \tilde{\nu}_{l'} 0 \ldots 0) \qquad \text{avec} \quad \tilde{\nu}_i(k) \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l')$$

respectivement; et

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial u} \triangleq \left[\frac{\partial \varphi_j^k(x^k, u)}{\partial u_\sigma}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ \sigma = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\frac{\partial \psi^k}{\partial v} \triangleq \left[\frac{\partial \psi_j^k(x^k, v)}{\partial v_\sigma}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, l;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s),$$

où les dérivées partielles sont calculées en

$$u = p^*(x^k), \qquad v = e^*(x^k), \qquad x^k = \tilde{x}^*(k).$$

Puisque $\varphi_\alpha^k(x^k, p^*(x^k))$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m'$, et $\psi_\alpha^k(x^k, e^*(x^k))$, $\alpha = 1, 2, \ldots, l'$, ont un extrémum en $x^k = \tilde{x}^*(k)$, nous avons

$$(80)\qquad \begin{cases} \tilde{\mu}^{\mathrm{T}}(k)\left[\dfrac{\partial\varphi^k}{\partial\mathbf{x}} + \dfrac{\partial\varphi^k}{\partial u}\dfrac{\partial p^*}{\partial\mathbf{x}}\right] = 0, \\ \tilde{\nu}^{\mathrm{T}}(k)\left[\dfrac{\partial\psi^k}{\partial\mathbf{x}} + \dfrac{\partial\psi^k}{\partial v}\dfrac{\partial e^*}{\partial\mathbf{x}}\right] = 0, \end{cases}$$

où

$$\frac{\partial\varphi^k}{\partial\mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial\varphi_j^k(x^k, u)}{\partial x_\sigma}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ \sigma = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\frac{\partial\psi^k}{\partial\mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial\psi_j^k(x^k, u)}{\partial x_\sigma}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, l;\ \sigma = 0, 1, \ldots, n)$$

et où les dérivées partielles sont calculées en

$$u = p^*(x^k), \qquad v = e^*(x^k), \qquad x^k = \tilde{x}^*(k).$$

De (19) et (80) nous déduisons

$$\tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}(k+1)\frac{\partial \mathrm{F}^k}{\partial u}\frac{\partial p^*}{\partial\mathbf{x}} = \tilde{\mu}^{\mathrm{T}}(k)\frac{\partial\varphi^k}{\partial\mathbf{x}},$$

$$\tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}(k+1)\frac{\partial \mathrm{F}^k}{\partial v}\frac{\partial e^*}{\partial\mathbf{x}} = \tilde{\nu}^{\mathrm{T}}(k)\frac{\partial\psi^k}{\partial\mathbf{x}}$$

ou, sous une forme équivalente,

$$(81)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}^k}{\partial u}\dfrac{\partial p^*}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\Lambda}(k+1) = \left(\dfrac{\partial\varphi^k}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\mu}(k), \\ \left(\dfrac{\partial \mathrm{F}^k}{\partial v}\dfrac{\partial e^*}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\Lambda}(k+1) = \left(\dfrac{\partial\psi^k}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\nu}(k), \end{cases}$$

où $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}$ sont les vecteurs colonnes

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 \\ \tilde{\mu}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mu}_{m'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\nu} = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\nu}_{l'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalement, en utilisant (81), l'équation adjointe (66) peut être mise sous la forme

$$(82)\qquad \tilde{\Lambda}(k+1) - \tilde{\Lambda}(k) = -\left(\frac{\partial \mathrm{F}^k}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\Lambda}(k+1) - \left(\frac{\partial\varphi^k}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\mu}(k) - \left(\frac{\partial\psi^k}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\nu}(k).$$

Si les contraintes sont indépendantes de l'état x, l'équation adjointe se réduit à :

$$\tilde{\Lambda}(k+1)-\tilde{\Lambda}(k)=-\left(\frac{\partial F^k}{\partial \mathbf{x}}\right)^T\tilde{\Lambda}(k+1). \tag{83}$$

2.24. Exemple.

Considérons un jeu multi-étage régi par les équations

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(k+1)-\tilde{x}_1(k)=\tilde{x}_0(k), \\ \tilde{x}_2(k+1)-\tilde{x}_2(k)=\tilde{u}(k)+\tilde{v}(k), \\ \tilde{x}_3(k+1)-\tilde{x}_3(k)=1. \end{cases} \tag{84}$$

$$\tilde{x}_0(k+1)-\tilde{x}_0(k)=\tilde{x}_1(k)\tilde{x}_2(k)+\tilde{u}^2(k)-\tilde{v}^2(k) \tag{85}$$

et

$$K_u=K_v=E^1.$$

Un trajet dans l'espace des états augmenté E^4, engendré par une paire de stratégies qui satisfait aux conditions nécessaires d'optimalité, sera représenté par

$$\tilde{\mathbf{x}}^*: k\to \mathbf{x}^k=\tilde{\mathbf{x}}^*(k), \qquad \text{où} \quad \tilde{\mathbf{x}}^*\stackrel{\Delta}{=}(\tilde{x}_0^*, \tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*),$$

et les commandes correspondantes seront désignées par

$$\tilde{u}^*: \quad k\to u=\tilde{u}^*(k), \qquad \tilde{v}^*: \quad k\to v=\tilde{v}^*(k).$$

Dans ce problème, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{k+1}=\tilde{x}_1(k)\tilde{x}_2(k)+\tilde{u}^2(k)-\tilde{v}^2(k)+\tilde{\lambda}_1(k+1)\tilde{x}_2(k)\\ +\tilde{\lambda}_2(k+1)(\tilde{u}(k)+\tilde{v}(k))\end{aligned} \tag{86}$$

et les équations adjointes relatives à $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$ sont

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1(k+1)-\lambda_1(k)=-\tilde{x}_2^*(k), \\ \tilde{\lambda}_2(k+1)-\lambda_2(k)=-\tilde{x}_1^*(k)-\lambda_1(k+1) \end{cases} \tag{87}$$

pour $k=i, i+1, \ldots, K-1$.

De la condition (a) du théorème 1 nous déduisons

$$\begin{cases} 2\tilde{u}^*(k)+\tilde{\lambda}_2(k+1)=0, \\ -2\tilde{v}^*(k)+\tilde{\lambda}_2(k+1)=0, \end{cases} \tag{88}$$

ce qui implique

$$\tilde{u}^*(k)=-\tilde{v}^*(k). \tag{89}$$

De la condition (*d*) du théorème 1 nous déduisons

$$\tilde{\lambda}_1(\mathrm{K}) = \tilde{\lambda}_2(\mathrm{K}) = 0. \tag{90}$$

Posons

$$\begin{cases} \tilde{x}_0^*(\mathrm{K}) = x_0^{\mathrm{K}} = \mathrm{C}, \\ \tilde{x}_1^*(\mathrm{K}) = x_1^{\mathrm{K}}, \\ \tilde{x}_2^*(\mathrm{K}) = x_2^{\mathrm{K}}. \end{cases} \tag{91}$$

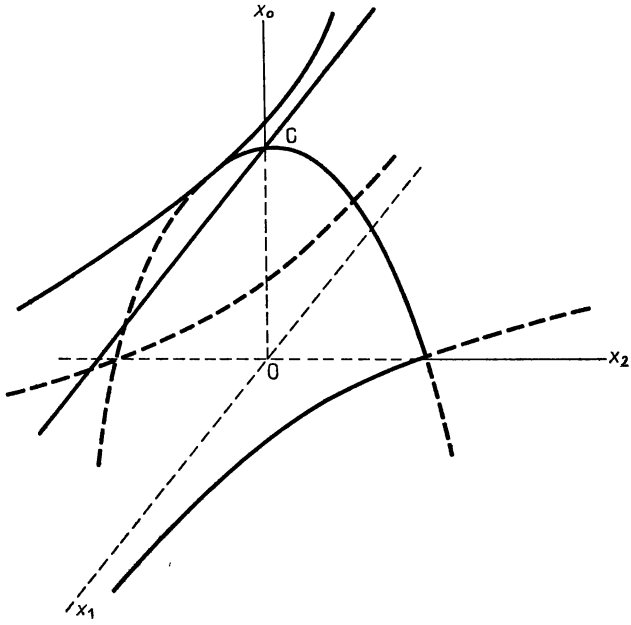

Fig. 2.7. — Surface $\Sigma_k(\mathrm{C})$, $k \neq \mathrm{K}$, $\mathrm{K}-1$.

De (84)-(90) nous déduisons que :

à l'étage $\mathrm{K}-1$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2^*(\mathrm{K}-1) &= \tilde{x}_2^*(\mathrm{K}) = x_2^{\mathrm{K}}, \\ \tilde{x}_1^*(\mathrm{K}-1) &= \tilde{x}_1^*(\mathrm{K}) - \tilde{x}_2^*(\mathrm{K}-1) = x_1^{\mathrm{K}} - x_2^{\mathrm{K}}, \\ \tilde{x}_0^*(\mathrm{K}-1) &= \mathrm{C} - x_2^{\mathrm{K}}(x_1^{\mathrm{K}} - x_2^{\mathrm{K}}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\mathrm{K}-1) &= x_2^{\mathrm{K}}, \\ \tilde{\lambda}_2(\mathrm{K}-1) &= x_1^{\mathrm{K}} - x_2^{\mathrm{K}}; \end{aligned}$$

à l'étage $K-2$:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_0^*(K-2) &= \tilde{x}_2^*(K-1) = x_2^K,\\
\tilde{x}_1^*(K-2) &= \tilde{x}_1^*(K-1) - x_2^K = x_1^K - 2x_2^K,\\
\tilde{x}_0^*(K-2) &= -x_2^K(x_1^K - 2x_2^K) + \tilde{x}_0^*(K-1)\\
&= C - x_2^K(2x_1^K - 3x_2^K)
\end{aligned}$$

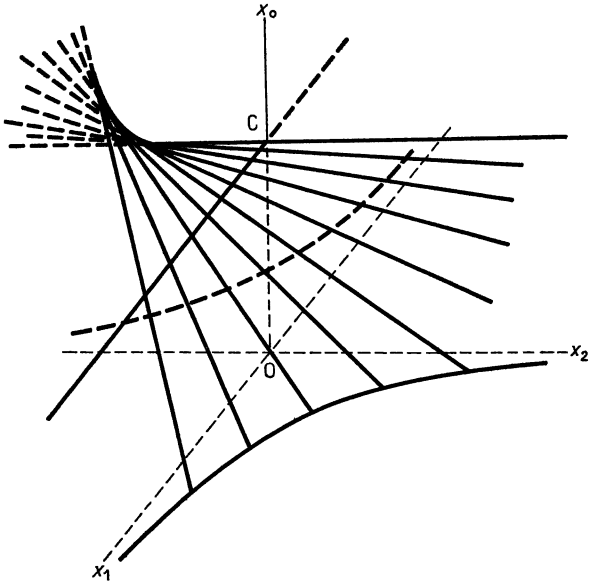

Fig. 2.8. — Surface $\Sigma_{K-1}(C)$.

et

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_1(K-2) &= x_2^K + x_2^K = 2x_2^K,\\
\tilde{\lambda}_2(K-2) &= x_1^K - 2x_2^K + x_2^K + x_1^K - x_2^K = 2(x_1^K - x_2^K).
\end{aligned}$$

Plus généralement, on prouverait par récurrence que :

à l'étage $K-m$ $(0 \leqq m \leqq K-i)$:

$$(92)\qquad \begin{cases}
\tilde{x}_2^*(K-m) = x_2^K,\\
\tilde{x}_1^*(K-m) = x_1^K - m x_2^K,\\
\tilde{x}_0^*(K-m) = C - m x_2^K\left(x_1^K - \dfrac{m+1}{2}x_2^K\right)
\end{cases}$$

et

$$(93)\qquad \begin{cases}
\tilde{\lambda}_1(K-m) = m x_2^K,\\
\tilde{\lambda}_2(K-m) = m(x_1^K - x_2^K).
\end{cases}$$

De (88) et (93) nous tirons

$$(94)\qquad \begin{cases} \tilde{u}^*(\mathrm{K}-m) = -\tilde{v}^*(\mathrm{K}-m) = -\dfrac{m-1}{2}(x_1^{\mathrm{K}} - x_2^{\mathrm{K}}) \\ \qquad (m = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}-i). \end{cases}$$

La valeur du jeu à l'étage k est

$$V^*(\tilde{x}^*(k)) = \tilde{x}_0^*(\mathrm{K}) - \tilde{x}_0^*(k) = (\mathrm{K}-k)\,x_2^{\mathrm{K}}\left(x_1^{\mathrm{K}} - \frac{\mathrm{K}-k+1}{2}\,x_2^{\mathrm{K}}\right).$$

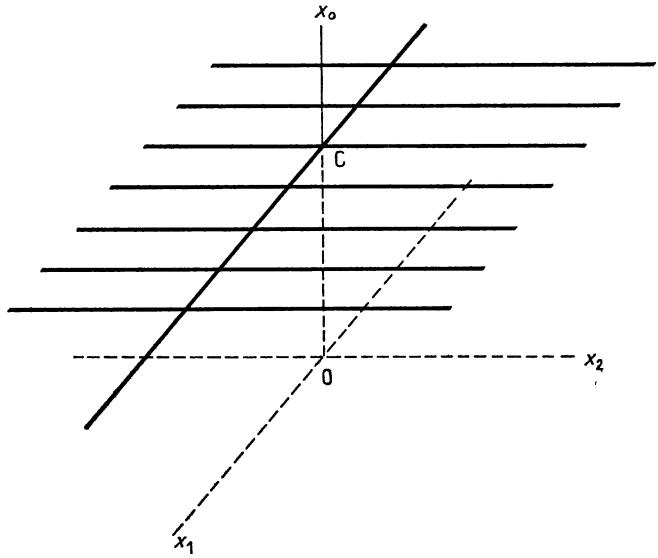

Fig. 2.9. — Surface $\Sigma_{\mathrm{K}}(C)$.
$\Sigma_k(C)$ est un plan perpendiculaire à l'axe x_0.

Posons maintenant

$$\tilde{x}_0^*(k) = x_0^k,$$
$$\tilde{x}_1^*(k) = x_1^k,$$
$$\tilde{x}_2^*(k) = x_2^k.$$

De (92) nous déduisons que

$$x_2^k = x_2^{\mathrm{K}},$$
$$x_1^k = x_1^{\mathrm{K}} - (\mathrm{K}-k)\,x_2^{\mathrm{K}}.$$

Par conséquent, la valeur du jeu à l'étage k peut être mise sous la forme

$$(95)\qquad V^*(\tilde{x}^*(k)) = (\mathrm{K}-k)\,x_2^k\left(x_1^k + \frac{\mathrm{K}-k-1}{2}\,x_2^k\right).$$

Il s'ensuit que l'équation de la surface $\Sigma_k(\mathrm{C})$ est

$$(96) \qquad x_0^k + (\mathrm{K} - k)\, x_2^k \left(x_1^k + \frac{\mathrm{K} - k - 1}{2} x_2^k \right) = \mathrm{C} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{K}).$$

La surface $\Sigma_k(\mathrm{C})$ est représentée sur les figures 2.7-2.9 dans l'espace $x_0 - x_1 - x_2$, pour $k \neq \mathrm{K}$, $\mathrm{K} - 1$, pour $k = \mathrm{K} - 1$, et pour $k = \mathrm{K}$.

Il est facile de vérifier que, dans cet exemple, les ensembles $\Omega_{\mathrm{P}}(\mathrm{K} - m)$ et $\Omega_{\mathrm{E}}(\mathrm{K} - m)$, $m = 0, 1, \ldots, \mathrm{K} - i - 1$, satisfont à l'hypothèse 2.

BIBLIOGRAPHIE.

1. *Sur la géométrie des processus optimaux.*

[1] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *On the Geometry of Optimal Processes*, Parts I, II, III, Univ. of California, Berkeley, I. E. R. Repts. AM-64-10, AM-65-11, AM-66-1.

[2] G. LEITMANN, *Some Geometrical Aspects of Optimal Processes* (J. SIAM, Ser. A : Control 3, No. 1, 1965).

[3] A. BLAQUIÈRE, *Further Investigation into the Geometry of Optimal Processes* (J. SIAM, Ser. A : Control 3, No. 2, 1965).

[4] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *Some Geometric Aspects of Optimal Processes*, Part I : *Problems with Control Constraints* (Proc. Congr. Automatique Théorique, 1965, Paris, Dunod, 1967).

[5] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *On the Geometry of Optimal Processes*, dans *Topics in Optimization*, Academic Press, 1967, p. 265-371 (G. Leitmann, ed.).

[6] K. V. SAUNDERS et G. LEITMANN, *Some Geometric Aspects of Optimal Processes*, Part II : *Problems with State Constraints* (Proc. Congr. Automatique Théorique, 1965, Paris, Dunod, 1967).

[7] H. HALKIN, *The Principle of Optimal Evolution*, in *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, Academic Press, 1963 (J. P. La Salle and S. Lefschetz, eds.).

[8] H. HALKIN, *Mathematical Foundations of System Optimization*, dans *Topics in Optimization*, Academic Press, 1967, p. 198-260 (G. Leitmann, ed.).

[9] E. ROXIN, *A Geometric Interpretation of Pontryagin's Maximum Principle*, dans *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, Academic Press, 1963 (J. P. La Salle and S. Lefschetz, eds.).

[10] R. E. BELLMAN, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.

[11] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *Further Geometric Aspects of Optimal Processes : Multiple-Stage Dynamic Systems*, dans *Mathematical Theory of Control*, Academic Press, 1967.

2. *Sur la théorie des jeux.*

[12] J. VON NEUMANN et O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1953.

[13] J. MC KINSEY, *An Introduction to the Theory of Games*, Mc Graw-Hill, 1952.

[14] L. ZADEH, *Optimality and Nonscalar-valued Performance Criteria* (*I. E. E. E. Transactions on Automatic Control*, vol. AC-8, January 1963, p. 59-60).

[15] R. ISAACS, *Differential Games*, Wiley, New York, 1965.

[16] L. D. BERKOVITZ, *A Variational Approach to Differential Games*, dans *Advances in Game Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1964, p. 127-174.

[17] L. D. BERKOVITZ et W. H. FLEMING, *On Differential Games with Integral Payoff*, dans *Contributions to the Theory of Games*, III, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957, p. 413-435.

[18] L. D. BERKOVITZ, *Necessary Conditions for Optimal Strategies in a Class of Differential Games and Control Problems* (J. SIAM Control, vol. 5, No. 1, 1967, p. 1-24).

[19] D. L. KELENDZHERIDZE, *A Pursuit Problem*, dans *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, New York, 1962.

[20] L. S. PONTRYAGIN, *On Some Differential Games* (J. SIAM Control, vol. 3, No. 1, 1965, p. 49-52).

[21] L. S. PONTRYAGIN, *On the Theory of Differential Games* (*Uspehi Mat. Nauk*, 21, No. 4 (130), 1966, p. 219-274].

[22] E. F. MISHCHENKO et L. S. PONTRYAGIN, *Linear Differential Games* (*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 174, No. 1, 1967, p. 27-29, et *Soviet Math. Dokl.*, vol. 8, No. 3, 1967, p. 585-588).

[23] Y. C. HO, A. E. BRYSON et S. BARON, *Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies* (*I. E. E. E. Transactions on Automatic Control*, vol. AC-10, October 1965, p. 385-389).

[24] S. BARON, *Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies* (*Unpublished doctoral dissertation*, Harvard University, Cambridge, 1966).

[25] E. N. SIMAKOVA, *Differential Games* (a survey paper) (*Avtomatika i Telemekhanica*, vol. 27, No. 11, November 1966, p. 161-178).

[26] I. G. SARMA et R. K. RAGADE, *Some Considerations in Formulating Optimal Control Problems as differential Games* (*Int. J. Control*, vol. 4, No. 3, 1966, p. 265-279).

[27] G. MON, *Differential Game Theory : A Geometric Approach.* Unpublished doctoral dissertation, Univ. California, Berkeley, 1967.

[28] G. LEITMANN et G. MON, *Some Geometric Aspects of Differential Games* (*Journal of Astraunautical Sciences*, vol. 14, No. 2, March-April 1967, p. 56-65).

[29] G. LEITMANN et G. MON, *On a Class of Differential Games* (*Proceed. Colloquium on Advanced Problems and Methods for Space Flight Optimization*, Liège, 1967, Pergamon Press, 1968 (aussi dans *Kibernetika*, January 1968).

[30] G. WANG et G. LEITMANN, *Necessary and sufficient Conditions for Two-Person, Zero-Sum Multistage Games* (*J. Optim. Theory Appl.*) (en cours de publication).

[31] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *Multiple-Stage Quantitative Games* (*2nd International Colloquium on Methods of Optimization*, Novosibirsk, 1968; Ed. Springer-Verlag) (en cours de publication).

[32] A. BLAQUIÈRE et F. GÉRARD, *On the Geometry of Optimal Strategies in Two-Person Games of Kind* (*J. Computer System Sci.*, vol. 2, No. 3, October 1968).

[33] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *Multistage Quantitative Games* (*Proceedings of the 2nd Hawaii International Conference of System Sciences*, 1969, p. 579).

[34] A. BLAQUIÈRE et N. GANI, *Jeux quantitatifs multiétages avec étage terminal non prescrit* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 268, série A, 1969, p. 428).

[35] A. BLAQUIÈRE et G. LEITMANN, *Multistage Quantitative Games with Unprescribed Terminal Stages* (*Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 4, 1969).

[36] A. BLAQUIÈRE, F. GÉRARD et G. LEITMANN, *Quantitative and Qualitative Games*, Academic Press Inc., 1969.

[37] F. GÉRARD, *Théorie géométrique des jeux différentiels qualitatifs à deux joueurs* (*Thèse de Doetorat d'État*, Faculté des Sciences de Paris, 1968).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION ET NOTATIONS 1

CHAPITRE I.

Jeux différentiels quantitatifs.

1. 1. Formulation du jeu, théorème fondamental 2
1. 2. Propriétés des solutions optimales 10
1. 3. Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité 17
1. 4. Exemples 31

CHAPITRE II.

Jeux multi-étage quantitatifs.

2. 1. Introduction 42
2. 2. Équations d'état, stratégies et cible θ 43
2. 3. Trajets dans l'espace des états E^n 44
2. 4. Coût d'un transfert 45
2. 5. Paire de stratégies jouable 46
2. 6. Paire de stratégies optimale, valeur du jeu 46
2. 7. Surface du jeu 47
2. 8. Une décomposition de la surface du jeu 48
2. 9. Trajets dans l'espace des états augmenté E^{n+1} 49
2.10. Quelques propriétés des surfaces du jeu et des trajets 51
2.11. Ensembles Ω_P et Ω_E 53
2.12. Convexité directionnelle 55
2.13. Points réguliers d'une surface $\Sigma_k(C)$ 56
2.14. Trajets optimaux réguliers 58
2.15. Équation variationnelle aux différences 59
2.16. Transformation linéaire et son inverse 61
2.17. Quelques propriétés des transformations A^k et $\mathcal{A}^k$ 62
2.18. Transformation d'un plan tangent 63
2.19. Équations adjointes 65
2.20. Gradient et vecteur adjoint 66
2.21. Conditions de transversalité 67
2.22. Un théorème min-max 68
2.23. Contraintes 68
2.24. Exemple 71
BIBLIOGRAPHIE 76