

BOUTROUX

Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 368-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__368_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION
D'UN THÉORÈME DE M. CAUCHY.

PAR M. BOUTROUX,

Elève du Collège royal d'Orléans

La racine $m^{\text{ème}}$ du produit de m nombres est plus petite que la moyenne arithmétique entre ces m nombres.

Je commencerai par démontrer que le théorème est vrai, lorsque m est une puissance de 2.

Il est vrai pour la racine carrée : en effet, appelons a et b les deux nombres, je dis qu'on aura $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ car on a identiquement

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

ab est donc moindre que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, et par conséquent \sqrt{ab} est aussi moindre que $\frac{a+b}{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de passer de la au cas où $m = 4$ en effet

$\sqrt[4]{abcd}$ peut se mettre sous la forme $\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$. Je considère \sqrt{ab} et \sqrt{cd} comme deux facteurs; nous aurons donc la racine carrée des deux facteurs \sqrt{ab} et \sqrt{cd} qui sera moindre que $\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}$; or \sqrt{ab} est moindre que $\frac{a+b}{2}$ et \sqrt{cd} moindre que $\frac{c+d}{2}$, donc à plus forte raison $\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$ ou $\sqrt[4]{abcd}$ sera moindre que $\frac{a+b+c+d}{4}$.

On passera de ce cas à celui où $m=8$, puis au cas où $m=16$ et ainsi de suite. Le théorème est donc vrai pour un nombre de facteurs égal à une puissance quelconque de 2.

Avant de démontrer le théorème pour tous les cas possibles, je vais faire voir que s'il est vrai pour le cas où l'on considère $m+1$ nombres, il sera encore vrai pour le cas où on n'en considère plus que m . Je suppose qu'on ait

$$\sqrt[m+1]{abcd\dots kl} < \frac{a+b+c+d\dots+k+l}{m+1},$$

et je dis qu'on aura

$$\sqrt[m]{abcd\dots k} < \frac{a+b+c+d\dots+k}{m};$$

en effet, $\sqrt[m]{abcd\dots k}$ peut se mettre sous la forme

$$\sqrt[m+1]{\sqrt[m]{a^{m+1}b^{m+1}\dots k^{m+1}}};$$

je fais sortir $a^m b^m \dots k^m$ de dessous le deuxième radical, et

j'ai ainsi $\sqrt[m+1]{abcd\dots k \sqrt[m]{abcd\dots k}}$. Or nous avons ici

$m+1$ facteurs sous un radical dont l'indice est $m+1$, et nous avons supposé que dans ce cas le théorème est vrai; nous aurons donc

$$\sqrt[m+1]{abcd\dots k \sqrt[m]{abcd\dots k}}$$

ou

$$\sqrt[m]{abcd\dots k} < \frac{a+b+c+d\dots+k + \sqrt[m]{abcd\dots k}}{m+1};$$

on tire de là ce qu'on voulait démontrer, savoir :

$$\sqrt[m]{abcd\dots k} < \frac{a+b+c+d\dots+k}{m}.$$

Si le théorème est vrai pour un certain nombre de facteurs, il est donc encore vrai lorsqu'on a un facteur de moins. Or quel que soit le nombre de facteurs que l'on considère, on pourra toujours trouver une puissance de 2 plus grande que ce nombre; le théorème étant vrai pour un nombre de facteurs égal à cette puissance de 2, sera encore vrai pour ce nombre diminué d'une unité, puis de deux, de trois unités, et ainsi de suite. On descendra ainsi jusqu'au nombre proposé: le théorème est donc démontré.

Observation. La première partie de cette démonstration est celle de M. Cauchy; la seconde en diffère un peu. (*Cours d'Analyse*, page 457, 1821.) MM. Lobbato et Bobillier en ont donné aussi une démonstration dans la *Correspondance Mathématique* de M. Quételet, tome IV, p. 169, 1828.

Tm.