NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^re série, tome 2 (1843), p. 106-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__106_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, *voir* p 26.)

XIX *Angle des asymptotes; puissance de l'hyperbole.*

Désignant par δ l'angle des asymptotes, les équations de ces lignes (XVII) donnent

$$\tang^2\delta = \frac{m\sin^2\gamma}{N^2}\ ;\ \cos^2\delta = \frac{N^2}{N^2+m\sin^2\gamma}\ ;\ \sin^2\delta = \frac{m\sin^2\gamma}{N^2+m\sin^2\gamma} \quad (15)$$

ce qu'on peut tirer aussi de l'équation (3).

Puissance de l'hyperbole $= \frac{a^2}{2} \frac{\sin\delta}{1+\cos\delta}$ où a désigne le $\frac{1}{2}$ axe focal : remplaçant a, $\sin\delta$, $\cos\delta$, par leurs valeurs, tirées des équations (3) et (15); il vient, puissance de l'hyperbole $= \sin\gamma . \frac{L\sqrt{m}}{m^2}$ (16).

Observation 1. Lorsque deux hyperboles égales sont rapportées aux mêmes axes, il faut donc que $\frac{L^2}{m^3}$ ait même valeur dans les deux courbes; ce qui s'accorde avec le corollaire 1 du paragraphe VIII.

Observation 2. $\frac{m \sin^2\gamma}{N^2}$ est aussi le carré de la tangente de l'angle que forment les diamètres conjugués égaux dans l'ellipse; ce qu'on déduit facilement de l'équation (3); aussi cette fraction suffit-elle pour établir le caractère de similitude entre les ellipses. Mais pour les hyperboles, il faut de plus que le produit NL ait le même signe dans les deux courbes, afin d'exclure le cas des hyperboles conjuguées. Lorsque NL est positif, l'hyperbole est située dans l'angle aigu des asymptotes, et lorsqu'il est négatif, l'hyperbole est dans l'angle obtus.

XX. *Intersection d'une conique et d'une droite; condition de tangence.*

Soit $dy+ex+f=0$, l'équation d'une droite; éliminant y entre cette équation et l'équation (1), on obtient

$$Rx^2+Sx+T=0 \ (17); \quad R=Ae^2-Bde+Cd^2;$$
$$S=2Aef-Bdf-Dde+Ed^2; \quad T=Af^2-Ddf+Fd^2;$$

on parvient au même résultat, en faisant dans l'équation finale de la page 35, $A'=B'=C'=0$; l'équation en y s'obtient, en changeant A en C, D en E, d en e, et *vice versâ*.

$$S'^2 - 4RT = d^2\,(l'\,d^2 - 2den + le^2 + mf^2 + 2fdk' + 2fek) = d^2V.$$

Si V est positif, la droite coupe la conique en deux points ; si V est négatif, la droite ne rencontre pas la conique ; la droite est tangente, lorsqu'on a l'équation

$$V = 0\,(18),\ \text{et alors } x' = -\frac{S}{2R}\,;\ y' = -\frac{S'}{2R}\,;$$

x' et y' sont les coordonnées du point du contact.

Ou $$S' = 2Cdf - Bef - Ede + De^2.$$

Coroll. 1. $-\frac{S}{2R}$ et $-\frac{S'}{2R}$ sont dans le cas général les coordonnées du point de moyenne distance des intersections, réelles ou imaginaires, de la droite et de la conique ; faisant $e = dr$; $f = ds$; il vient

$$x' = -\frac{S}{2R} = \frac{-2Ars + Bs + Dr - E}{2(Ar^2 - Br + C)}$$

$$y' = -\frac{S'}{2R} = \frac{-2Cs + Brs - Dr^2 + Er}{2(Ar^2 - Br + C)}$$

L'équation de la sécante est $y + rx + s = 0$; si r est constant et s variable, on a un système de sécantes parallèles ; éliminant s entre cette équation, et les coordonnées du point de moyenne distance, on obtient le lieu géométrique de ce point ; effectuant cette élimination, il vient

$$r\,(2Ay + Bx + D) = 2Cx + By + E\ (19).$$

Cette équation est celle d'une droite ; égalant à zéro chaque membre séparément, on a $x = \frac{k}{m}$, $y = \frac{k'}{m}$, coordonnées du centre.

On a donc ce théorème : *le lieu géométrique du point de moyenne distance de deux points d'intersection d'une sécante, donnée de direction, est un diamètre.*

Observation. Lorsque $m = 0$; la droite donnée par l'équation (19) a une direction constante, quelle que soit la valeur de r; elle est constamment parallèle à la droite donnée par l'équation $2Ay+Bx+D=0$.

Coroll. 1. Soit $p=\frac{2C-Br}{2Ar-B}$, $q=-r$; éliminant r, on tombe sur la relation entre les lignes conjuguées (XI).

Coroll. 2. En considérant dans l'équation $y+rx+s=0$, s comme constante, et r comme variable, elle représente une droite, passant par le point fixe $x=0$, $y=-s$; éliminant r entre l'équation de la droite mobile et les coordonnées du point de moyenne distance, on obtient une équation du second degré, appartenant à une conique semblable à la conique donnée et semblablement placée. Nous ne nous arrêterons pas sur cette proposition que M. le professeur Midy a déjà traitée complétement. (Tome 1, p. 481.)

XXI. *Équation d'une conique qui touche cinq droites.*

Soit $dy+ex+f=0$, l'équation d'une de ces droites; la condition de tangence donne $V=0$ (XX), chacune des quatre autres droites donne une équation semblable. On a ainsi cinq équations du premier degré, d'où l'on tire les valeurs des cinq rapports, $\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}, \frac{l}{m}, \frac{l'}{m}, \frac{n}{m}$.

Les six premières identités donnent les valeurs de $\frac{AL}{m^2}, \frac{BL}{m^2}, \frac{CL}{m^2}, \frac{DL}{m^2}, \frac{EL}{m^2}, \frac{FL}{m^2}$; on connaît donc les cinq rapports $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}, \frac{F}{A}$, et par conséquent l'équation de la conique.

Coroll. 1. En prenant deux des droites données pour axes des coordonnées, on a $l=l'=0$; il ne reste plus à résoudre que trois équations à trois inconnues, et on peut se donner les trois autres droites par les points où elles coupent les axes.

Coroll. 2. En faisant varier les rapports $\frac{e}{d}, \frac{f}{d}$, la droite représentée par l'équation $dy+ex+f=0$ devient mobile ; si ces variations satisfont constamment à l'équation $V=0$ (18), la droite restera tangente à une même conique ; autrement, *l'enveloppe* de la droite est une conique, et pour trouver l'équation de cette conique, il suffit de se donner cinq positions différentes de la droite.

Coroll. 3. Remplaçant dans l'équation (18), e et f par dr et ds, elle devient $ms^2+2krs+lr^2+2k's-2nr+l'=0$ (20) ; résolvant par rapport à s et ayant égard aux identités, on a

$$s=\frac{-kr-k'\pm2\sqrt{L(Ar^2-Br+C)}.}{m}$$

Dans l'ellipse L et Ar^2-Br+C sont positifs ($A>0$) ; donc s est réel pour une valeur quelconque de r; ainsi, dans l'ellipse, on peut toujours mener deux tangentes parallèles à une droite donnée ; dans la parabole, on ne peut mener qu'une tangente ; mais dans l'hyperbole, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $L\,(Ar^2-Br+C)>0$.

XXI. Théorème de Newton (*). *Un quadrilatère étant circonscrit à une conique les trois milieux des diagonales du quadrilatère complet et le centre de la conique sont sur une même droite.*

Démonstration. Soit ABCD le quadrilatère circonscrit à une conique ; prenons le côté AB pour axe des x et AD pour axe des y ; soient P et Q les points de rencontre respectifs des côtés BC et CD avec AD et AC ; menons les diagonales PQ et BD ; AB et AD étant les axes tangents à la courbe, on a donc $l=l'=0$; $y+rx+s=0$, équation de la droite CD ; $y+r'x+s'=0$ équation de la droite BC ; mais ces droites étant des tangentes, on a les deux relations

(*) Princ. math., lib. 1, coroll. 3, lem. 25

$$ms^2+2krs+2k's-2nr=0,$$
$$ms'^2+2kr's'+2k's'-2nr'=0.$$

Éliminant n, et faisant $x=\frac{k}{m}$; $y=\frac{k'}{m}$, on obtient

$$2y\,(rs-rs')+2xrn'\,(s-s')=rs'^2-r's^2;$$

équation d'une droite sur laquelle se trouve évidemment le centre de la conique. Or, cette droite est celle qui passe par les milieux des diagonales BD et PQ; en effet, le milieu de BD a pour coordonnées $x=-\frac{s'}{2r'}$, $y=-\frac{s}{2}$; le milieu de PQ a pour coordonnées $x=-\frac{s}{2r}$; $y=-\frac{s'}{2}$ et ces valeurs satisfont à l'équation de la droite. Par un moyen analogue, on démontre que les milieux des deux diagonales PQ, AC et le centre sont sur une même droite; donc. . C. Q. F. D.

Coroll. Le lieu géométrique du centre des coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.

XXII. *Équation d'une tangente passant par un point donné, non sur la conique.*

Soit x', y' les coordonnées du point; $y+rx+s=0$ l'équation de la tangente; donc, $s=-(y'+rx')$; subtituant cette valeur dans l'équation (20), il vient

$$r^2\,(mx'^2-2kx'+l)-2r\,(ky'+k'x'+n-mx'y') \\ +my'^2-2k'y'+l'=0.$$

Résolvant cette équation et ayant égard aux identités, il vient

$$r=\frac{ky'+k'x'+n-mx'y'\pm 2\sqrt{\mathrm{LF'}}}{mx'^2-2kx'+l};$$

ou

$$\mathrm{F'}=\mathrm{A}y'^2+\mathrm{B}x'y'+\mathrm{C}x'^2+\mathrm{D}y'+\mathrm{E}x'+\mathrm{F}.$$

Coroll. 1. Lorsque $F'L$ est positif, le problème est possible et alors le point donné est situé hors de la courbe ; si $F'L$ est négatif, le problème est impossible et le point est dans l'intérieur de la courbe ; on a donc un moyen de connaître la position d'un point, relativement à la courbe.

Coroll. 2. Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, si l'on désigne par α l'angle formé par les deux tangentes, menées par le point (x', y'), on a

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{16LF'}{[m(x'^2+y'^2)-2kx'-2k'y'+l+l']^2};$$

ainsi lorsque cet angle est constant, le lieu géométrique du point (x', y') est une ligne du quatrième degré, que nous discuterons ailleurs. Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cette ligne se réduit à un cercle (double) pour l'ellipse et l'hyperbole, et à une droite (directrice) pour la parabole.

XXIII. *Équation d'une tangente à un point pris sur la conique.*

Lorsque le point est sur la conique, on a

$$F'=0\,;\quad r = \frac{ky'+k'x'-mx'y'+n}{mx'^2-2kx'+l},$$

d'où

$$r^2 = \frac{my'^2-2k'y'+l'}{mx'^2-2kx'+l} = \frac{(2Cx'+By'+E)^2}{(2Ay'+Bx'+D)^2} \text{ (pag. 490, tome I.)}$$

d'où

$$r = \frac{2Cx'+By'+E}{2Ay'+Bx'+D};$$

d'ailleurs on a

$$ky'+k'x'-mx'y'+n = (2Ay'+Bx'+D)(2Cx'+By'+E) \text{ (*)}$$

(*) A cette identité on peut ajouter celle-ci :

$$A(2Cx+By+E)^2 + C(2Ay+Bx+D)^2 - B(2Ay+Bx+D)(2Cx+By+E) = L - m(Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F).$$

car

$$y' = (2AE + BD) = y'(k - 2BD)$$

$$(4AC+B^2)\, x'y' = x'y'\,(-m+2B^2);\ x'(2CD+BE) = x'\,(k-2BE)$$

$$DE = n + 2BF\,;$$

en ajoutant, on trouve l'équation (20).

Donc, l'équation de la tangente est

$$(y-y')\,(2Ay'+Bx'+D) + (x-x')\,(2Cx'+By'+E) = 0,$$

ou bien, effectuant les multiplications et ayant égard à l'équation $F'=0$, il vient

$$y\,(2Ay'+Bx'+D) + x\,(2Cx'+By'+E) + Dy'+Ex'+2F = 0 \quad (21).$$

Observation. L'équation (20) est remarquable en ce qu'elle présente sous une nouvelle forme l'équation de la conique; forme utile à employer en certains problèmes; elle nous apprend que les intersections de la conique par les deux diamètres que donne la résolution immédiate de l'équation sont situées sur une hyperbole ayant pour équation

$$ky + k'x - mxy + n = 0.$$

XXIII (*bis*). *Équation de la polaire.*

Si x' et y' sont les coordonnées d'un point situé hors de la courbe, l'équation (21) devient celle de la droite qui joint les points de contact des tangentes menées par le point. En effet, les coordonnées du premier point de contact doivent satisfaire à cette équation et aussi les coordonnées du second point de contact; mais deux points déterminent une droite, donc, etc. : cette droite se nomme la *polaire* du point.

XXIV. *L'équation (21) peut s'obtenir directement par une autre méthode qui présente l'avantage de s'appliquer à une courbe algébrique de degré quelconque.*

Soit $P_m + P_{m-1} + P_{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ P_2 + Dy + Lx = 0$, l'équation d'une courbe de degré m, P_m est la somme des termes de degré m; P_{m-1} la somme des termes de degré $m-1$, et ainsi de suite; on suppose le dernier terme où $P_0=0$; ainsi l'origine est sur la courbe; la tangente à la courbe menée par l'origine a pour équation $Dy+Ex=0$; en effet, menant par l'origine une droite quelconque, ayant pour équation $y=px$; éliminant y entre les deux équations, on a l'équation en x qui appartient aux points d'intersection de la droite et de la courbe; cette équation est divisible par x; donc, comme cela doit être, une racine est nulle; pour qu'une seconde racine soit nulle, il faut poser $Dp+E=0$ et alors la droite a deux points en commun avec la courbe et devient une tangente; d'où $p=-\frac{E}{D}$; et l'équation de la tangente est donc $Dy+Ex=0$.

Supposons maintenant que l'origine ne soit pas sur la courbe, elle aura pour équation

$$P_m+P_{m-1}+\ldots\ldots Dy+Ex+F=0=f(x,y).$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point de la courbe, on a donc $f(x',y')=0$; pour trouver l'équation de la tangente en ce point, transportons-y l'origine, ce qu'on obtient en remplaçant x et y par $x+y'$ et $y+y'$ dans la fonction $f(x,y)$, ou ce qui revient au même de remplacer x' et y' par $x'+x$ et $y'+y$ dans la fonction $f(x',y')$, ce qui donne, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x',y')+xf''_{x'}(x',y')+yf'_{y'}(x',y')+\text{ etc.}=0:$$

$f'_{x'}$ désigne la dérivée par rapport à x', et $f'_{y'}$ la dérivée par rapport à y'; mais $f(x',y')=0$, donc l'équation de la tangente est $xf''_{x'}+yf''_{y'}=0$; revenant à la première origine, on aura pour équation de la tangente

$$(x-x')\ f'_{x'}+(y-y')\ f'_{y'}=0;$$

or, pour les courbes du second degré, on a

$$f'_{x'} = 2Cx' + By' + E$$
$$f'_{y'} = 2Cy' + Bx' + D.$$

(*La suite prochainement.*)