NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JACOB

Note sur les paramètres des courbes du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 138-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__138_0>

NOTE

SUR LES

PARAMÈTRES DES COURBES DU SECOND ORDRE.

PAR M. JACOB,
Capitaine d'artillerie.

—

On a donné le nom de *paramètre* au double de l'ordonnée qui passe par le foyer.

Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on a

$$2A : 2B :: 2B : 2p,$$

et le paramètre peut être considéré comme une troisième proportionnelle au grand et au petit axe,

$$2p = \frac{2B^2}{A}.$$

Si nous étendons cette définition, et qu'on l'emploie encore dans le cas où, au lieu des axes principaux, on considère des diamètres conjugués, on aura le paramètre des diamètres conjugués

$$2p' = \frac{2B'^2}{A'} \;(*).$$

Regardons cette valeur comme une ordonnée de la courbe par rapport aux deux diamètres conjugués ON et OQ, et

(*) C'est la vraie et unique définition du paramètre, telle qu'elle est donnée par Apollonius. L'ordonnée qui passe par le foyer est égale au paramètre de l'axe principal, mais n'est pas propre à définir le paramètre. Tm.

cherchons le lieu du point R d'intersection du diamètre ON avec son paramètre.

Ce qui revient à traiter cette question générale :

« Quel est le lieu géométrique des intersections des para-
» mètres avec leurs diamètres dans les courbes du second
» degré? »

1° Dans l'ellipse.

Posons (*fig.* 5.) :

$$OA = A, OB = B, ON = A', OQ = B', OF = c, MF = p$$
$$OP = x'; PN = y'; OR = c', RS = p', OI = \alpha, RI = \beta.$$

C'est donc une relation entre α et β qu'il s'agit de trouver. Remarquons que $c = \sqrt{A^2 - B^2}$. Nous avons par analogie appelé c' la distance du centre au point R où le paramètre SR coupe son diamètre. Puisque, par hypothèse, $SR = \frac{B'^2}{A'}$, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués ON, OQ

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

il vient

$$x^2 = c'^2 = OR^2 = A'^2 - B'^2;$$

cela posé, on a les relations suivantes :

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2 \qquad (1)$$

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{y'}{\beta} = \frac{x'+y'}{\alpha+\beta} \qquad (2)$$

$$x'^2 + y'^2 = A'^2 \qquad (3)$$

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2 \qquad (4)$$

$$A'^2 - B'^2 = \alpha^2 + \beta^2 = c'^2 \qquad (5)$$

La deuxième nous est donnée par la considération des triangles semblables ORI, ONP. Entre ces cinq équations, il nous est facile d'éliminer les quantités x', y', A', B' qui déterminent un système particulier de diamètres conjugués, et une seule position du point R, et il nous restera alors une équation en α et β coordonnées du point R, ce sera le lieu décrit par ce point.

Or de (2) on tire

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}=\frac{y'^2}{\beta^2}=\frac{x'^2+y'^2}{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (6)$$

Divisons l'équation (3) par $\alpha^2+\beta^2$

$$\frac{x'^2+y'^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{A'^2}{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (7)$$

La comparaison de (6) avec (7) donne

$$x'^2=\frac{\alpha^2 A'^2}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad y'^2=\frac{\beta^2 A'^2}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad (8)$$

or, de l'addition de (4) avec (5), il vient

$$A'^2=\frac{1}{2}(A^2+B^2+\alpha^2+\beta^2).$$

Remplaçons A'^2 par cette valeur dans (8), il vient

$$x'^2=\frac{(A^2+B^2+\alpha^2+\beta^2)\,\alpha^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}, \qquad y'^2=\frac{(A^2+B^2+\alpha^2+\beta^2)\,\beta^2}{2\,(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Reportons ces valeurs dans (1), et l'on aura l'équation du lieu : cette équation simplifiée devient

$$(\alpha^2+\beta^2)\,(A^2\beta^2+B^2\alpha^2)-(A^2-B^2)\,(B^2\alpha^2-A^2\beta^2)=0. \qquad (9)$$

Il est facile de construire la courbe que représente cette équation. Et d'abord cette équation est satisfaite par $\alpha=0$ $\beta=0$, ainsi la courbe passe par le centre. Elle passe aussi par les deux foyers, car si l'on fait $\beta=0$, il vient $\alpha=\pm\sqrt{A^2-B^2}$. Cette courbe ne coupe l'axe des y qu'au centre de l'ellipse, car si l'on fait $\alpha=0$, il reste $\beta^2\,(\beta^2+A^2-B^2)=0$, et cette relation ne peut être satisfaite qu'en posant $\beta^2=0$, car la seconde hypothèse $\beta^2+A^2-B^2=0$, donne pour β deux valeurs imaginaires. L'origine est donc un point double.

Si l'on développe l'équation (9), il vient

$$A^2\beta^4 + B^2\alpha^4 + (A^2+B^2)\alpha^2\beta^2 + A^2(A^2-B^2)\beta^2 + B^2(B^2-A^2)\alpha^2 = 0.$$

La limite du rapport $\frac{y}{x}$ ou $\frac{\beta}{\alpha}$, qui donne la valeur de l'inclinaison de la tangente à l'origine, est $\pm\frac{B}{A}$. Ainsi la courbe est tangente à l'origine aux deux diamètres conjugués égaux TT′, UU′ qui sont les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse. Et cela doit être, car quand les deux diamètres conjugués deviennent égaux, quand $A'=B'$, $c'=\sqrt{A'^2-B'^2}=0$. Et alors le point où le paramètre du premier des diamètres conjugués égaux coupe ce diamètre, coïncide avec le centre. Chacun des quatre demi-diamètres conjugués égaux est donc un demi-paramètre.

Aux points F, F′ la tangente à la courbe est verticale, car le coefficient d'inclinaison de la tangente est

$$-\frac{4B^2\alpha^3 + 2(A^2+B^2)\alpha\beta^2 + 2B^2(B^2-A^2)\alpha}{4A^2\beta^3 + 2(A^2+B^2)\alpha^2\beta + 2A^2(A^2-B^2)\beta},$$

et ce coefficient devient ∞ pour $\beta=0$. Le numérateur égale à zéro donnera les points auxquels la tangente est horizontale.

Enfin il est un moyen très-facile de trouver par une construction géométrique autant de points de la courbe que l'on voudra ; il suffit pour cela de supposer l'ellipse décrite.

Pour cela, on se servira des relations (4) et (5), d'où l'on conclut

$$c'^2 = 2A'^2 - (A^2+B^2).$$

Ainsi, pour construire la longueur OR de c' qui correspond au diamètre ON, je construis un triangle rectangle KGH (*fig.* 6) dont les deux côtés de l'angle droit KG et GH sont égaux à $ON = A'$. $KH^2 = 2A'^2$. Sur KH diametre, je décris une demi-circonférence, du point K comme centre d'un rayon $KL = A'B = \sqrt{A^2+B^2}$, je décris un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en L, je joins HL, et $HL^2 = \overline{KH}^2 - \overline{KL}^2 = 2A'^2 - (A^2+B^2)$. Donc $HL = c'$, c'est la longueur OR égale à c' qu'il faut porter sur ON. Connaissant ainsi un point, on a les symétriques

2° Dans l'hyperbole (*fig.* 7).

Posons comme dans l'ellipse

$$c = \sqrt{A^2+B^2}, \quad p = \frac{B^2}{A},$$

$$OA = A,\ OB = B,\ ON = A',\ OQ = B',\ OF = c,\ MP = p, \text{ (*)}$$
$$OP = x',\ NP = y',$$

$$OR = c' = \sqrt{A'^2+B'^2}, \quad RS = p' = \frac{B'^2}{A'}\ IO, = \alpha,\ RI = \beta$$

Puis on a, comme précédemment, les cinq relations

$$A'^2y'^2 - B'^2x'^2 = -A'^2B'^2 \qquad (1)$$
$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{y'}{\beta} = \frac{x'+y'}{\alpha+\beta} \qquad (2)$$
$$x'^2 + y'^2 = A'^2 \qquad (3)$$
$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2 \qquad (4)$$
$$A'^2 + B'^2 = \alpha^2 + \beta^2 = c'^2 \qquad (5)$$

qui ne sont autres que celles que nous avions pour l'ellipse, et dans lesquelles B'^2 est changé en $-B'^2$. Il suffit donc pour avoir l'équation du lieu d'opérer ce changement dans l'équation finale en α et β obtenue pour l'ellipse.

On a ainsi

$$(\alpha^2+\beta^2)(A^2\beta^2 - B^2\alpha^2) + (A^2+B^2)(A\beta^2 + B\alpha^2) = 0.$$

(*) Les points I et P sont omis dans la figure.

Cette équation étant satisfaite par l'hypothèse $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on en conclut que l'origine est un point de la courbe.

Mais c'est un point isolé, car tant que α sera > 0 et $< c$, β sera imaginaire.

Si, au contraire, on fait seulement $\beta = 0$, on trouve

$$\alpha = \pm\sqrt{A^2 + B^2}.$$

La courbe cherchée coupe donc l'axe des x aux points F et F', et les deux foyers de l'hyperbole sont les deux sommets de la courbe, comme cela était facile à prévoir.

La courbe ne coupe pas l'axe des y, car l'hypothèse $\alpha = 0$ donne pour β deux valeurs imaginaires.

Elle est symétrique par rapport aux axes des x et des y, car son équation résolue donne

$$\beta = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}\left\{(A^2+B^2)+\left(\frac{A^2-B^2}{A^2}\right)\alpha^2\right\} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left\{A^2+B^2+\left(\frac{A^2-B^2}{A^2}\right)\alpha^2\right\}^2 + \frac{4B^2\alpha^2}{A^2}\left(B^2\alpha^2-(A^2+B^2)\right)}}\,;$$

pour une même valeur de α, β a donc deux valeurs égales et de signes contraires; qui plus est, β a les deux mêmes valeurs soit que l'on prenne $+\alpha$ ou $-\alpha$. Enfin, à partir de la valeur $\alpha = c$, on peut faire croître α jusqu'à l'infini, β sera toujours réel, partant la courbe cherchée se compose de 4 branches infinies comme celles de l'hyperbole.

Cette courbe admet aussi les mêmes asymptotes que l'hyperbole, car en employant la méthode de M. Cauchy pour déterminer les asymptotes droites, c'est-à-dire en posant $\beta = s\alpha$, on trouve que lem $s = k = \pm\frac{B}{A}$. Puis, en posant $\beta = k\alpha + t$, il vient $t = 0$.

Les asymptotes sont donc bien $\beta = \pm \frac{B}{A} \alpha$.

Les équations $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$, $c'^2 = A'^2 + B'^2$ nous donnent un moyen très-simple de construire géométriquement autant de points de la courbe que l'on voudra. En effet, on en conclut

$$B' = \pm\sqrt{A'^2 - (A^2 - B^2)}.$$

Cela posé, sur une droite indéfinie ax (*fig*. 8), je porte des longueurs $ab = A'$, $ab' = A''$, $ab'' = A'''$.........

Sur chacune de ces longueurs je décris une demi-circonférence. Puis d'un rayon $ac = \sqrt{A^2 - B^2}$ du point a comme centre, je décris un arc de cercle qui coupe les circonférences en des points c, c', c''...... tels que $bc = B' = \sqrt{A'^2 - (A^2 - B^2)}$, $b'c' = B'' = \sqrt{A'^2 - (A^2 - B^2)}$....... Enfin élevant les perpendiculaires $bd = bc = B'$, $b'd' = b'c' = B''$......... et joignant ad, ad', ad''.. .... on aura $ad = \sqrt{A'^2 + B'^2} = c'$..... Si donc, dans la figure (7) je prolonge $ON = A'$ de manière que $OR = ad$ de la figure (8), le point R sera à la courbe. Ayant ainsi déterminé un point R, on aura les symétriques r, R$'$, r'.....

Observation. Les deux courbes construites ici sont celles des deux premiers genres d'Euler (Introd. ad. analys., t. 2, cap. XI). On les simplifie en passant aux coordonnées polaires Sous cette forme, leur quadrature devient facile. La rectification se ramène aux transcendantes elliptiques. La courbe des paramètres dans la parabole est une seconde parabole, semblablement placée, passant par le foyer et d'un paramètre moitié moindre; ce qu'on peut déduire de l'équation (9), mais la méthode directe est plus simple. Tm