Nouvelles annales de mathématiques

Vidal

Démonstration du théorème 50

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 145-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__145_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 50 (page 520).

PAR M. VIDAL,
Élève au Collége de Montpellier.

—

Une corde étant inscrite dans une parabole, le produit des distances des extrémités de cette corde à un diamètre quelconque est égal à la partie de ce diamètre, interceptée entre la courbe et la corde, multipliée par le paramètre de l'axe principal.

Soit AB la corde donnée (*fig.* 23), et CE un diamètre quelconque de la parabole qui est nécessairement parallèle à l'axe OX. Je désigne par $2p$ le paramètre de l'axe principal, nous devrons avoir, d'après l'énoncé du théorème.

$$BC.AE = DF \times 2p.$$

Les axes étant rectangulaires, je désigne l'équation de la corde AB par $y = mx + n$ et celle du diamètre EC par $y = \beta$; il faut déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B de la corde donnée avec la parabole. On verra d'ailleurs très-facilement qu'on n'a besoin que de connaître les ordonnées de ces points; par conséquent, entre les deux équations $y = mx + n$ $y^2 = 2px$, j'élimine x : de la deuxième, je tire $x = \frac{y^2}{2p}$, portant cette valeur dans la première, il vient $y = \frac{my^2}{2p} + n$, d'où $2py = my^2 + 2pn$, et en transposant, il vient

$$my^2 - 2py + 2pn = 0,$$

d'où

$$y=\frac{p\pm\sqrt{p^2-2pmn}}{m},$$

les deux distances BC et AE seront donc

$$\frac{p+\sqrt{p^2-2pmn}}{m}-\beta \quad \text{et} \quad \frac{p-\sqrt{p^2-2pmn}}{m}-\beta,$$

ou bien $\dfrac{p-m\beta+\sqrt{p^2-2pmn}}{m}$ et $\dfrac{p-m\beta\sqrt{p^2-2pmn}}{m}$.

Si nous faisons le produit de ces deux quantités, nous aurons au numérateur le produit de la somme par la différence de deux quantités, ce qui donnera la différence des carrés de ces deux quantités, par conséquent

$$\text{BC}\,.\,\text{AE}=\frac{m\beta^2-2p\beta+2pn}{m};$$

maintenant nous n'aurons plus qu'à chercher la distance DF, pour cela je cherche les coordonnées des deux points D et F. Ces coordonnées seront

$$\text{D}\ldots\ldots\left\{\begin{matrix} y=\beta \\ x=\dfrac{\beta^2}{2p}\end{matrix}\right\}, \qquad \text{F}\ldots\left\{\begin{matrix} y=\beta \\ x=\dfrac{\beta-n}{m}\end{matrix}\right\}.$$

nous aurons donc

$$\text{DF}=\frac{\beta^2}{2p}-\frac{\beta-n}{m}=\frac{m\beta^2-2p\beta+2pn}{2pm};$$

pour que le théorème soit vrai, il faut qu'en multipliant cette fraction par $2p$, nous obtenions le produit AE $\times$ BC. Or, on voit qu'effectivement on obtient ce produit : par conséquent le théorème énoncé ci-dessus est vrai.