JACOB

Problème sur les aires minima (alvéole)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 160-162
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__160_0>

PROBLÈME

Sur les aires minima (alvéole).

PAR M. JACOB,
Capitaine d'artillerie.

« ABCDEF (*fig.* 4 bis) est un hexagone régulier dont le » côté est donné. Six plans AaBb, BbCc, CcDd, DdEe, » EeFf, FfAa, perpendiculaires au plan de l'hexagone com- » posent la surface convexe d'un prisme hexagonal. Les » arêtes Aa, Cc, Ee, sont égales, leur longueur est déter- » minée. Les arêtes Bb, Dd, Ff, sont égales, mais leur lon- » gueur est inconnue.

» abc, cde, efa, sont trois plans qui se coupent sur l'axe » OS du solide, au point S, tel que la somme des aires des » six trapèzes AabB, BbcC, CcdD, DdeE, EefF, FfaA et » des trois losanges abcS, cdeS, efaS, est moindre qu'elle » ne le serait si les trois points b, d, f étaient placés plus » haut ou plus bas sur les arêtes Bb, Dd, Ff.

» Quelle est la position du point b, d, ou f pour que la » condition du minimum soit remplie ? »

Tirez bh (*) parallèle à AB, l'inconnue de la question est ah différence des deux arêtes Aa, Bb.

Tirez les diagonales ac et bS et AC, on aura

$$ac = \mathrm{AC} = \mathrm{AB}\sqrt{3},$$

car AC est le côte du triangle équilatéral inscrit dans un cercle.

(*) La ligne bh est omise dans la figure

L'aire du trapèze $AabB$ sera égale à

$$AB\left(\frac{Aa+Bb}{2}\right)=AB\left(\frac{2Aa-ah}{2}\right)$$

la somme des six aires des trapèzes $=3\ AB\ (2Aa-ah)$. (1)

L'aire du losange $abcS=2aG\times bG$.

Or $2aG=ac=AB\sqrt{3}$; puis

$$bG^2=ab^2-aG^2=bh^2+ah^2-aG^2=AB^2+ah^2-\frac{3}{4}AB^2$$

ainsi :

$$bG^2=\frac{1}{4}AB^2+ah^2.$$

Donc, l'aire $abcS=AB\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{1}{4}AB^2+ah^2\right)}$, et la somme des trois losanges $=3AB\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{4}AB^2+ah^2\right)}$. (2)

Ajoutons les expressions (1) et (2) et nous aurons pour l'expression de l'aire qui doit être un minimum :

$$3AB\left\{2Aa-ah+\sqrt{\left(\frac{3}{4}AB^2+3ah^2\right)}\right\}. \qquad (3)$$

Je pose $AB=a$, $Aa=b$, $ah=x$; cette expression (3) se change en

$$3a\left\{2b-x+\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}\right\}. \qquad (4)$$

Or $\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}-x$ est une quantité positive que je représente par y ; l'expression (4) deviendra :

$$3a\left\{2b+y\right\},$$

de sorte que l'on pourra représenter l'aire minimum par celle d'un rectangle qui aurait pour base la constante $3a$, pour hauteur la constante $2b$ augmentée de la ligne variable et inconnue représentée par

$$\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}-x=y.$$

Pour que la surface du rectangle soit un minimum, il faut que y lui-même soit un minimum.

Cherchons donc quand y sera un minimum.

$$\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}=x+y,$$

d'où
$$x^2-xy=\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{8}a^2,$$

et enfin
$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{3y^2}{4}-\frac{3a^2}{8}}.$$

Or, pour que x soit réel, il faut que $\frac{3y^2}{4}$ soit $>\frac{3a^2}{8}$, ou tout au moins que

$$\frac{3y^2}{4}=\frac{3a^2}{8}.$$

Le minimum de y est donc tiré de cette équation, et est

$$y=\frac{1}{2}a\sqrt{2},$$

et à cette valeur minimum de y correspond celle de x :

$$x=\frac{y}{2}=\frac{1}{4}a\sqrt{2}.$$

Ainsi la question est résolue, et ah, différence des deux arêtes Aa, Bb est le quart de la diagonale du carré dont AB est le côté.

L'angle solide S est le quart de l'espace sphérique autour d'un point.

Le résultat est la vérification de la géométrie des Abeilles qui construisent exactement leurs alvéoles d'après ces principes.