NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GUILMIN

Problèmes d'examen. Solutions de M. Guilmin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 205-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__205_1>

PROBLÈMES D'EXAMEN.

SOLUTIONS DE M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

—

1. *Inscrire dans une ellipse donnée un triangle maximum.*

Dans un triangle satisfaisant à cette question, chaque côté doit être parallèle à la tangente menée par le sommet opposé.

En effet, soit un triangle HBC (*fig.* 32) tel que le côté BC ne soit pas parallèle à la tangente en H. Menons GA, parallèle à BC, du même côté que H, et tangente à l'ellipse en un point A. Le triangle ABC est évidemment plus grand que HBC. Nous ne pouvons donc chercher un triangle maximum que parmi ceux dont les côtés remplissent la condition énoncée. Tous ces triangles ont même surface : si on le démontre, il sera prouvé que chacun d'eux est un maximum.

Soit ABC l'un d'eux. La tangente au sommet A étant parallèle à BC, le diamètre AOMD passe au milieu, M, de la corde BC. La même observation s'appliquant à chacun des trois côtés, il en résulte que les trois médianes de ABC passent au centre de l'ellipse, qui est, par conséquent, le centre de gravité du triangle. Par suite, $OM = \frac{AO}{2}$.

On a surface $ABC = AM \times MC. \sin AMC$.

Prenons AOD pour axe des y et son conjugué pour axe des x. Soit

$$AO = b'; \; OP = a'. \text{ On a } AM = b' + \frac{b'}{2} = \frac{3}{2}b'.$$

Pour avoir MC, j'observe qne c'est l'abscisse du point d'intersection de l'ellipse avec la droite BC dont l'équation est $y = -\frac{b'}{2}$. L'équation de l'ellipse étant $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$,

en y faisant $y = -\frac{b'}{2}$, il vient

$$\frac{a'^2b'^2}{4} + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \quad \text{ou} \quad x^2 = a'^2 - \frac{a'^2}{4} = \frac{3}{4}a'^2,$$

d'où

$$x \text{ ou } MC = \frac{a'}{2}\sqrt{3}.$$

Par suite

$$ABC = \frac{3}{4}a'b'\sqrt{3}\sin AMC.$$

Or, AMC étant l'angle des deux diamètres conjugués, a', b', on a $a'\,b' \sin AMC = ab$, d'où

$$ABC = \frac{3}{4}ab\sqrt{3},$$

valeur constante ; ce qu'il fallait démontrer.

Il y a donc une infinité de triangles maximums.

On peut se donner à volonté l'un des sommets.

Soit proposé d'inscrire dans l'ellipse un triangle maximum ayant pour sommet un point donné A de l'ellipse. On tire le diamètre AOD et son conjugué OP ; on prend le milieu de OD, et, par ce milieu M, on mène la corde BC parallèle à OP ; ce sera la base du triangle ; on joindra AB, AC ; le triangle ABC répond évidemment à la question.

2. *Circonscrire à un triangle donné ABC (fig. 32) une ellipse minimum.*

Il suffit de construire une ellipse pour laquelle ce triangle soit un triangle maximum inscrit, ce qui est facile. Pour cela, on observera qu'il faut, et il suffit, que le centre de cette ellipse coïncide avec le centre de gravité du triangle ; on a donc à construire une ellipse connaissant le centre et trois points ; cette ellipse est évidemment déterminée. Je dis que c'est l'ellipse minimum circonscrite. En effet, concevons qu'on ait circonscrit au triangle une seconde ellipse quelconque ; pour cette nouvelle ellipse, le triangle ne sera pas un triangle maximum inscrit ; car, si cela était, la courbe aurait, comme la première, pour centre, le centre de gravité du triangle, et comme elles ont déjà trois points communs, A, B, C, elles se confondraient ; ce qui est contre l'hypothèse.

Soient a, b, les demi-axes de la première ellipse ; et a', b' ceux de la seconde : on aura

$$\mathrm{ABC}=\frac{3}{4}ab\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \mathrm{ABC}<\frac{3}{4}a'b'\sqrt{3}.$$

Donc, $a'b'>ab$; ou, $\pi a'b'>\pi ab$.

Donc, la première ellipse est la plus petite des ellipses circonscrites au triangle ABC.

3. *Circonscrire à une ellipse donnée un triangle minimum.*

Tout triangle satisfaisant à cette condition doit être tel que chaque côté soit parallèle à la ligne qui joint les points de contact des deux autres.

En effet, soit un triangle ADE (*fig.* 33) circonscrit à l'ellipse, et supposons que le côté DE ne soit pas parallèle à la corde des contacts GH. Je mène à l'ellipse la tangente BIC, parallèle à GH ; le triangle circonscrit ABC aura une surface moindre que ADE. Pour le démontrer, je ferai d'abord observer que le point de contact I est le milieu de BC ; car si l'on mène du point A au centre O de l'ellipse la droite AO, elle divisera en parties égales toutes les cordes parallèles à GH, et passera par les points de contact des tangentes parallèles à ces cordes. Donc, la droite AO prolongée passe par le point I, et puisque les parallèles GH, BC, sont coupées en parties proportionnelles par AI, le point I est au milieu de BC. La droite ED coupe BC en un point F différent de I, sans cela, ces deux tangentes se confondraient. Les deux triangles ABC, ADE, ayant la partie commune ABFE, il reste pour l'un $CFE = \frac{1}{2} EF.\ CF.\ \sin F$, et pour l'autre $BFD = \frac{1}{2} BF.\ FD.\ \sin F$. Or, $CF < BF$; et si l'on mène BM parallèle à AC, on trouve $EF : FM :: CF : FB$; donc, à cause de $CF < BF$, on a : $EF < FM$, et à fortiori $EF < FD$. Par suite, $EFC < BFD$; donc, $ABC < ADE$. Ainsi, on ne peut chercher le triangle circonscrit minimum que parmi ceux dont chaque côté est parallèle à la droite qui joint les points de contact des deux autres côtés.

Tous ces triangles ont même surface. En effet pour l'un d'eux, par exemple ABC, le triangle GIH formé par les lignes de contact est un triangle maximum inscrit dans l'ellipse, car il est tel que chacun de ses côtés est parallèle à la tangente menée par le sommet opposé. De plus, les trois lignes de contact joignent les milieux des côtés du triangle circonscrit, donc la surface du triangle circonscrit, est quadruple de celle du triangle inscrit. Or celle-ci étant constante et égale à $\frac{3}{4}\, ab\sqrt{3}$, la surface du triangle circonscrit est constante et égale à $3ab\sqrt{3}$.

Chacun des triangles qui satisfait à la condition indiquée est donc un minimum parmi ceux dans lesquels l'ellipse est inscrite.

On peut se donner un des points de contact I. Pour circonscrire à l'ellipse un triangle minimum dont un côté touche l'ellipse en un point donné I, on mènera le diamètre IO et on prendra au delà du centre sur cette ligne, une longueur $AO = 2IO$. Par le point A on mènera deux tangentes. Ces deux lignes formeront avec la tangente en I le triangle demandé. On peut éviter la construction des tangentes en inscrivant un triangle maximum ayant son sommet en I, et menant par chacun des trois sommets une parallèle au côté opposé.

4. *Inscrire dans un triangle donné une ellipse minimum.*

Il suffit de construire une ellipse pour laquelle le triangle proposé soit un triangle circonscrit minimum. Pour cela, il suffit de prendre pour centre de l'ellipse le centre de gravité du triangle et de la faire passer par les milieux des trois côtés. Cette ellipse est déterminée, car on donne son centre et trois points. C'est là l'ellipse maximum inscrite. En effet concevons qu'on ait inscrit dans le triangle une seconde ellipse quelconque. Le triangle proposé ne sera pas un triangle minimum circonscrit à celle-ci; car si cela était, elle se confondrait évidemment avec la première. Soient s la surface du triangle, a, b, les demi-axes de la première ellipse; a', b' ceux de la seconde. On a en même temps $s = 3ab\sqrt{3}$, d'après le théorème précédent, et $s > 3a'b'\sqrt{3}$. Donc $3ab\sqrt{3} > 3a'b'\sqrt{3}$ ou $ab > a'b'$ d'où $\pi ab > \pi a'b'$. Donc la première ellipse est plus grande que toute autre ellipse inscrite dans le triangle proposé.

(*La suite prochainement.*)