NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MIDY

La conchoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 281-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__281_0>

LA CONCHOÏDE,

PAR M. MIDY,

Ancien Professeur de mathématiques spéciales dans les Colléges royaux.

1. On suppose que sur toutes les droites issues d'un même point A dans un plan, on a pris, à partir de la droite BC, (*fig.* 51), une longueur constante $NM = NM' = c$.

La suite des points ainsi déterminés sera une courbe que l'on a nommée conchoïde.

2. Si l'on prend pour axe des x la droite donnée BC et pour celui des y la perpendiculaire AO sur cette droite, en appelant d la distance du point à la droite, l'équation du lieu sera

$$xy = \pm (d-y)\sqrt{c^2-y^2}, \qquad (1)$$

ou, en faisant disparaître le radical,

(*) $$x^2y^2 - (d-y)^2\,(c^2-y^2) = 0. \qquad (2)$$

On voit sous cette seconde forme que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, et que de plus l'axe des x est une asymptote, puisque l'hypothèse $y=0$ rend x infinie. Si l'on suppose $y > c$, abstraction faite du signe, le radical de (1) devient imaginaire et par conséquent la valeur de x l'est aussi, et comme $y = \pm c$ donne $x=0$, il en résulte que si l'on mène deux parallèles LG, L' G' à la droite BC, à des distances égales à $+c$ et $-c$, elles seront des limites de la courbe qu'elles rencontreront sur l'axe des y en K et K'.

3. En nommant m la tangente trigonométrique de l'angle

(*) Voir la Geometrie analytique de M. Comte, page 77 que fait avec l'axe des x une tangente à la courbe, on aura

$$m = \pm \frac{y^2\sqrt{c^2 - y^2}}{y^3 - dc^2}. \qquad (3)$$

En faisant $y = \pm c$, si l'on n'a pas en même temps $d = c$; c'est-à-dire si le point A ne se confond pas avec le point K, les valeurs de m seront nulles et les droites LG, L' G' seront des tangentes à la courbe.

Pour distinguer les différentes formes qu'affecte cette courbe, nous ferons successivement les trois hypothèses $d < c$, $d = c$, $d > c$; ce qui revient à supposer le point A au-dessous de LG, sur cette droite, ou au-dessus.

4. *Premier cas* (*fig.* 52). $d < c$. Mettons la valeur de x tirée de (1) sous la forme

$$x = \pm (d - y)\sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1} \qquad (4)$$

et ne considérons pour plus de simplicité que le signe supérieur de cette expression.

Quand on fera décroître y depuis c jusqu'à d, le premier facteur sera négatif et sa valeur absolue décroîtra depuis $c - d$ jusqu'à 0; le second croîtra depuis 0 jusqu'à $\sqrt{\frac{c^2}{d^2} - 1}$. Il suit de là que dans cet intervalle x sera négative et comprise entre les valeurs extrêmes 0 et 0. Il y aura donc entre ces limites une valeur maximum de x qui correspondra à la valeur de y qui rend m infinie, ou qui est donnée par la condition

$$y^3 - dc^2 = 0.$$

Il suit de là que la valeur correspondante de y est

$$y = \sqrt[3]{dc^2}.$$

Mettons la valeur de x sous la forme

$$x = \left(\frac{d}{y} - 1\right)\sqrt{c^2 - y^2} \qquad (5)$$

et faisons décroître y depuis d jusqu'à zéro.

Le premier facteur, devenu positif, croît sans cesse ainsi que le second. Donc la valeur de x croît depuis zéro jusqu'à l'infini. En adoptant le second signe dont est affectée la valeur de x, on trouvera en signes contraires les mêmes résultats que l'on vient d'obtenir.

En changeant y en $-y$, (5) devient

$$x = \pm\left(\frac{d}{y} + 1\right)\sqrt{c^2 - y^2}.$$

Alors depuis $y = c$ qui est l'ordonnée maximum jusqu'à $y = 0$, les valeurs de x sont continuellement croissantes depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pm\infty$. La courbe a donc dans cette première hypothèse $d < c$, la forme indiquée par la figure (52) : c'est-à-dire qu'elle est composée de deux branches distinctes et de formes différentes, séparées par la droite donnée BC et qui ont cette droite pour asymptote commune.

Le point A de la branche supérieure correspondant à $y = d$ est un point double auquel doivent correspondre deux tangentes différentes. En effet, cette hypothèse introduite dans (3), donne

$$m = \pm\frac{d}{\sqrt{c^2 - d^2}}.$$

Donc, si l'on prend sur BC deux points R et R' dont les distances au point A soient égales à c, les droits AR, AR' toucheront en A les deux parties KHAV, KH'AV' de la courbe.

5. *Deuxième cas.* Soit $d = c$ (*fig.* 53). Supposons que d croisse depuis la valeur que nous avons considérée précédemment jusqu'à la valeur actuelle $d = c$. Le point A se rapprochera constamment du point K. La partie fermée KHAH' diminuera sans cesse et tendra à s'anéantir ; et, à la limite $d = c$, cette partie se trouvera réduite à un point. Mais alors les points R et R' seront venus se confondre avec le point O. Il ne restera donc de la branche supérieure que les deux parties AV, AV' qui seront tangentes en A à

l'axe OY et par conséquent convexes à l'égard de cet axe.

Pour mettre hors de doute ce double contact en A de la branche supérieure avec l'axe des y, nous recourrons à la formule (3), devenue

$$m = \pm \frac{y^2 \sqrt{(c^2 - y^2)}}{c^3 - y^3}$$

que nous mettrons sous la forme suivante

$$m = \pm \frac{y^2 \sqrt{c+y}}{(c^2 + cy + y^2)\sqrt{c-y}}.$$

En y faisant $y=c$, il vient

$$m = \pm \frac{c^2 \sqrt{2c}}{3c^2 \times 0} = \pm \infty,$$

d'où il suit que la tangente est devenue parallèle à l'axe des y, ou qu'elle est confondue avec cet axe.

6. *Troisième cas.* Soit enfin $d > c$, c'est-à-dire en revenant à la figure primitive (*fig.* 51), supposons le point A au-dessus de la droite LG. La partie fermée AHKH' n'existe plus, ou ses points sont imaginaires. Alors les deux branches supérieure et inférieure sont convexes vers leurs tangentes respectives LG, LG' et ensuite vers l'asymptote commune BC : d'où il suit qu'elles ont chacune deux points d'inflexion, et c'est par la recherche et la détermination de ces points que nous allons terminer cette discussion.

7. En cherchant quelles sont les valeurs de y qui rendent la formule (3) un maximum, on trouve qu'elles sont données par l'équation (*)

$$y^3 - 3dy^2 + 2dc^2 = 0. \qquad (6)$$

Son dernier terme étant positif, elle a toujours une racine réelle négative dont la valeur absolue est moindre que c. Il y a donc aussi toujours un point d'inflexion sur la branche

(*) En faisant $y=dx$, l'équation en x devient numérique, et c'est alors seulement qu'on peut y appliquer les diverses propositions qui sont relatives aux équations numériques. Tm.

inférieure ; ce qui devait être puisque les deux parallèles L'G' et BC sont l'une une tangente et l'autre une asymptote de cette partie de la courbe.

Les deux autres racines de (6), quand elles sont réelles, sont nécessairement positives, puisque le terme affecté de la première puissance de y manque dans l'équation.

D'ailleurs la dérivée de (6) est

$$y^2 - 2dy = 0, \qquad (7)$$

et ses racines sont

$$y' = 0, \qquad y'' = 2d.$$

Or, on sait qu'elles doivent séparer les racines de (6) quand celles-ci sont réelles ; donc l'une des deux racines positives doit, dans ce cas, tomber entre 0 et $2d$, et l'autre être plus grande que $2d$, à moins qu'elles ne soient l'une et l'autre égales à cette dernière quantité. D'ailleurs elles seront réelles, égales ou imaginaires, selon que l'on aura

$$d > \text{ou} = \text{ou} < \frac{1}{2}c\sqrt{2}.$$

8. L'équation (6), quand on y fait $y = 0$, donne un résultat positif, et comme elle peut se mettre sous la forme

$$y^2(y - d) - 2d(y^2 - c^2) = 0,$$

quand on y fera $y = c$, le résultat sera

$$c^2(c - d).$$

Il sera donc négatif, nul, ou positif, selon que l'on aura

$$d > c, \text{ ou } = c, \text{ ou } < c,$$

c'est-à-dire, comme nous l'avons déjà remarqué, suivant que le point A sera au-dessus de LG, ou sur LG, ou au-dessous.

Dans le premier cas (*fig.* 51), il y aura donc une racine réelle positive, comprise entre 0 et c, et par conséquent un point d'inflexion situé de chaque côté de l'axe des y, sur la branche supérieure ; puis une autre racine réelle positive, mais plus grande que c, puisqu'elle est plus grande que $2d$, et à laquelle il ne peut correspondre aucun point de la courbe, puisque l'abscisse est imaginaire.

Dans la seconde hypothèse, c est racine de (6) et les deux autres racines sont

$$y = c\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

La première racine $c = 0$ indique le point A comme un des points cherchés, ce qui devait être. En effet, le point A de la figure 53 est un point double, et dans l'hypothèse actuelle, il est confondu avec le point K; l'axe tangent OY a donc en ce point A trois points communs avec la courbe, et les deux parties AV, AV′ y ont, par rapport à cet axe, des convexités opposées. C'est donc avec raison que le calcul indique ce point A en même temps que les points d'inflexion que l'on cherchait, puisqu'il a les propriétés qui les caractérisent.

Le point correspondant à la deuxième racine

$$c\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

est imaginaire, puisque $y > c$.

Celui qui correspond à la troisième racine

$$-c\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

est sur la seconde branche, puisque son ordonnée est négative et $< c$.

Enfin dans la troisième hypothèse $d < c$ (*fig.* 52), les résultats de nos deux substitutions étant de même signe, il ne peut tomber de racine unique entre 0 et c. Quand on aura $d < \frac{1}{2} c\sqrt{2}$, les racines seront imaginaires; quand $d = \frac{1}{2} c\sqrt{2}$, elles sont égales à $2d$, ou égales à $c\sqrt{2}$. Ainsi elles correspondent à des points imaginaires, et quand $d > \frac{1}{2} c\sqrt{2}$, alors les deux racines sont réelles, mais l'une est plus grande que $2d$, c'est-à-dire plus grande que $c\sqrt{2}$, et à plus forte raison plus grande que c; donc l'autre est aussi plus grande que c; donc les deux points correspondants de la courhe sont imaginaires. Il n'y a donc alors d'autre point d'inflexion que celui qui correspond à la racine négative et qui est situé sur la branche inférieure. Le premier cas que nous avons examiné est donc le seul où il y ait deux inflexions sur chacune des deux branches.

9. Quand on donnera le rapport de d à c, le calcul fera connaître la position particulière de chaque point d'inflexion. Soit donné, par exemple,

$$d=2c,$$

en faisant $c=1$, l'équation (6) devient

$$y^3-6y^2+4=0.$$

Cette équation a une racine positive comprise entre 0 et 1, une autre comprise entre 5 et 6 et une racine négative comprise entre 0 et -1; et l'on pourra, par les méthodes connues, trouver les valeurs aussi approchées qu'on voudra de la première et de la troisième racine.

Mais il sera souvent plus court et surtout plus convenable, dans une question toute géométrique, de déterminer les racines de (6) par des intersections de courbes du second degré. On les obtiendra, par exemple, en augmentant de d les ordonnées communes au cercle dont l'équation est

$$y^2+x^2-4dx-2\,\frac{d^2-c^2}{d}\,y=0,$$

et la parabole donnée par

$$y^2=dx.$$

10. Remarquons qu'il suffira de connaître l'ordonnée d'un point d'inflexion pour déterminer la position exacte de ce point.

Proposons-nous, en effet, de déterminer, dans le cas de la figure 53, la position de ce point, donnée, comme nous l'avons vu, par la valeur

$$y=c\left(1-\sqrt{3}\right).$$

Sur AK′, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence : faisons $AS'=AS=\sqrt{3}$, et la parallèle S′I à BC contiendra les points d'inflexion cherchés. Faisons $OK''=OK'$, et menons par le point A une parallèle à cette droite, elle déterminera sur S′K″ le point d'inflexion I. Si nous joignons ensuite I au point Z, déterminé par la rencontre des perpendiculaires en N et en A sur BC et sur AI, la perpendiculaire en I sur la droite ZI sera, par une construction connue (*), tangente à la courbe au même point.

Note sur la conchoïde et autres courbes de ce genre.

1. Supposons qu'une droite mobile, de longueur constante, soit inscrite dans la zone formée par deux cercles concentriques, situés dans le même plan, il est évident, 1° que chaque point de la droite décrit un cercle concentrique aux deux cercles donnés; 2° si du centre on abaisse une perpendiculaire sur la droite, dans une quelconque de ses positions, le pied de la perpendiculaire est le point de contact de la droite mobile avec son enveloppe; 3° si par chaque extrémité de la droite on mène une tangente au cercle sur lequel se trouve cette extrémité, le lieu du point de rencontre des deux tangentes est un cercle concentrique; 4° les normales de tous les cercles décrits par les points de la droite, et relatives à une même position, se coupent toutes en un même point, centre de tous les cercles.

2. Supposons qu'une droite mobile, de longueur constante, soit inscrite dans la zone limitée par deux lignes quelconques, continues ou discontinues, même tracées à la main libre et situées dans un même plan, soient M et M′, les deux extrémités de la droite, dans une quelconque de ses positions, et soit menée par M une normale à la première ligne, et

(*) Voir page 290

par M′ une normale à la deuxième ligne, les normales se rencontreront, généralement parlant, en un point O. Du point O comme centre avec les rayons OM, OM′, décrivons deux cercles ; comme ils sont tangents aux deux lignes, la droite MM′ dans la position infiniment voisine peut être considérée comme si elle se mouvait entre les deux cercles ; donc, en conséquence de ce qui précède (1) : 1° les normales de toutes les lignes décrites par les points de la droite mobile, et relatives à une position donnée, se coupent en un même point ; 2° en abaissant de ce point de rencontre une perpendiculaire à la droite, on a le point de contact de la droite avec son enveloppe ; 3° en menant par les extrémités de la droite des tangentes aux lignes données, la normale du lieu géométrique du point d'intersection des tangentes passera encore par le point de rencontre des normales.

3. Les applications sont nombreuses ; indiquons-en quelques-unes : *a*) Les cordes, de longueur constante, inscrites dans une conique, touchent, généralement parlant, une ligne du huitième ordre ; le point de contact pour chaque corde est la projection sur cette corde du point de rencontre des deux normales qui passent par les extrémités de la corde. Le système de deux droites représentant une section conique, le problème traité pag. 265, t. Ier, et pag. 225, t. II, est un cas particulier. Chaque point de la droite décrit une ellipse, proposition déjà connue de Proclus. Ce qui donne un moyen de mener une tangente à l'ellipse ainsi décrite.

b) La conchoïde est une courbe telle que les cordes inscrites, d'égale longueur (module) ont pour enveloppe un point (pôle), donc ce pôle est constamment la projection sur les cordes, du point de rencontre des deux normales qui passent par les extrémités de la corde. Tous les points de la corde mobile décrivent des conchoïdes de divers modules ; lorsque le module est nul, la conchoïde devient une droite (base). Ainsi, pour mener une tangente à la conchoïde par un point donné sur cette ligne, on cherche l'intersection de la base avec le rayon vecteur qui passe par le point donné ; par ce point d'intersection on élève une perpendiculaire à la base, et par le pôle une seconde perpendiculaire au rayon vecteur, la droite qui joint le point d'intersection des deux perpendiculaires, et le point donné, est une normale à la conchoïde ; on a donc aussi la tangente. Il est à remarquer que le lieu géométrique du point d'intersection est une parabole passant par le pôle, et dont le paramètre est égal à quatre fois la distance du pôle à la base.

4. En prenant pour base un cercle, plaçant le pôle sur le cercle, et opérant avec un module comme pour la conchoïde, on obtient une ligne nommée le *limaçon* de Pascal, à laquelle on peut mener des normales et des tangentes par la méthode précédente; chaque ligne peut servir de base, et on obtient la conchoïde correspondante. On se sert de cette espèce de conchoïdes dans les arts du dessin pour mener une tangente à une ligne quelconque, par un point situé sur la ligne.

5. Proclus, philosophe platonicien du v^e^ siècle, attribue la découverte de la conchoïde à Nicomède, dont les ouvrages sont perdus, et qui vivait, selon les uns, 150 ans avant l'ère vulgaire, et selon les autres un ou deux siècles après. C'est au moyen de cette courbe que Nicomède résolvait les deux problèmes, si célèbres chez les anciens, de la trisection de l'angle et des deux moyennes proportionnelles. Viète est le premier qui ait remarqué qu'on pouvait ramener à ces deux problèmes la résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Voici ses paroles : « Generaliter, id verum est, opere saltem alterutro, vel constructionis duarum mediarum continue proportionalium interdatas, vel sectionis anguli in tres partes æquales, omnia problemata, alioqui non solublia, explicari, in quibus cubi solidis, vel quadrato-quadrata plano planis sine adfectione vel cum adfectione adæ-

quantur. » (Pag. 256, édition de Schooten, 1646, *Supp. geom.*, prop. xxv.)

Viète se sert du mot *affectio* pour exprimer qu'une puissance est augmentée ou diminuée d'autres puissances de degré moindre; ainsi il dira que dans ce binôme $x^2 + dx$, le terme x^2 est *affecté* de la racine x multipliée par d.

Newton, le premier qui ait donné de si admirables conseils, et de plus admirables exemples pour la solution analytique des problèmes, établit une distinction très-importante entre la simplicité *algébrique* et la simplicité *mécanique*. La première consiste à obtenir des lignes dont les équations soient du degré le moins élevé et renfermant le plus petit nombre de termes possibles; la seconde consiste à n'avoir besoin que du moindre nombre d'instruments, et les moins compliqués pour tracer les lignes nécessaires à la solution. Ainsi la parabole réductible à deux termes est *algébriquement* plus simple que le cercle, qui exige au moins trois termes; mais *mécaniquement* considéré, le cercle est d'une description plus facile que la parabole; de même la conchoïde, ligne du quatrième degré, est moins simple, algébriquement parlant, que la parabole, ligne du second degré; mais, mécaniquement, elle est plus simple que la parabole. C'est ce qui a engagé Newton à adopter la conchoïde, de préférence aux coniques, pour construire les équations du troisième et du quatrième degré. Nous engageons à lire la *Construction linéaire des équations* dans la traduction française que l'on doit à Noël Beaudeux de l'*Arithmétique universelle* (*). C'est surtout aux élèves de l'École normale que nous recommandons la lecture assidue de cet ouvrage et celle de l'introduction à l'analyse des infinis d'Euler, deux productions qui font tant d'honneur à l'esprit humain. C'est dans l'étude des grands maîtres qu'ils trouveront les principes

(*) Arithmétique universelle de Newton, traduite du latin en français, avec des notes explicatives. 2 vol. in-4. Paris, 1802. (Tome II, p. 52.)

philosophiques de la science ; là et nulle part ailleurs, et non pas dans les écrits parfumés de nos petits-maîtres qui, simulant la grandeur des idées, la profondeur de la pensée par des périodes tudesques, d'une longueur, d'une obscurite etudiées, essayent d'introduire dans la plus limpide, la plus simple des dialectiques, le langage précieux, dont un des plus judicieux philosophes du grand siècle, dont Molière a déjà fait bonne justice. Les élèves qui auraient le malheur d'entrer dans cette prétendue voie philosophique, auraient découvert positivement le moyen le plus certain de se fausser systématiquement l'esprit. En leur donnant cet avis, en les prémunissant contre les dangers d'une telle direction, je crois remplir un devoir de conscience, et, s'ils s'égarent, ce ne sera pas faute d'avertissements.

6. La considération du mouvement, pour apprendre à mener les tangentes, imaginee par Descartes pour les trochoïdes (roulettes), employée aussi par Roberval, a été dans ces derniers temps très-généralisée par M. Chasles (Voy. Aperçu historique pour l'origine et le développement des méthodes en géométrie, p. 548 (1837). Tm.