Nouvelles annales de mathématiques

Commier

Note sur le quadrilatère plan, et la détermination de son centre de gravité

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 392-398

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__392_1>

NOTE

SUR LE QUADRILATÈRE PLAN

Et la détermination de son centre de gravité.

PAR M. COMMIER,
Ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur en chef du département de Lot-et-Garonne.

---

1. Si l'on joint les milieux des côtés adjacents d'un quadrilatère quelconque, on formera un parallélogramme dont les côtés seront parallèles aux diagonales du quadrilatère.

2. Chaque côté de ce parallélogramme est la moitié de la diagonale du quadrilatère à laquelle il est parallèle, et divise en deux parties égales le segment correspondant de l'autre diagonale.

3. Ce parallélogramme, dont la surface est moitié de celle du quadrilatère, est le plus grand qu'on puisse lui inscrire : à son tour, le quadrilatère est le plus petit qu'on puisse circonscrire au parallélogramme.

4. Si l'on joint les points où les côtés du parallélogramme coupent les diagonales du quadrilatère, on formera un nouveau quadrilatère semblable au premier : ses côtés seront les moitiés des côtés homologues du premier, et sa surface moitié de celle du parallélogramme, sera le quart de celle du quadrilatère primitif.

5. En faisant, pour ce nouveau quadrilatère, ce qu'on a fait pour le premier, on obtiendra un nouveau parallélogramme, moitié du deuxième quadrilatère; puis un troisième quadrilatère, moitié du second parallélogramme. On aura, par ce moyen, une suite de parallélogrammes et de quadrilatères, semblables aux premiers, leurs surfaces seront successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, etc., de la surface du quadrilatère primitif; leurs côtés seront successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etc. des diagonales ou des côtés correspondants de ce quadrilatère (*).

6. Si le quadrilatère est un carré, toutes les autres figures deviennent aussi des carrés : le côté du premier étant 1, les côtés des autres auront successivement pour valeur : $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}\sqrt{2}$, $\frac{1}{8}$, etc....; tandis que les surfaces correspondantes sont : 1 pour le carré primitif, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, etc., pour les suivants.

7. Étant donné un quadrilatère, il est facile d'y inscrire le parallélogramme maximum ; de même, étant donné un parallélogramme, il est aisé de lui circonscrire le quadrilatère minimum : seulement le problème est indéterminé, en ce sens qu'il y a réellement une infinité de quadrilatères qui peuvent satisfaire à la question, mais ils sont tous équivalents, ayant tous une surface double de celle du parallélogramme donné.

(*) Le point d'intersection des diagonales, centre d'homologie de tous les quadrilatères, est aussi leur point limite, ainsi que celui des parallélogrammes. Tm.

8. Si du quadrilatère on passe au prisme ou à la pyramide dont il est la base, l'on conçoit qu'on déduira, de ce qui précède, des théorèmes analogues pour le prisme et la pyramide à base de quadrilatère.

9. Si dans un quadrilatère quelconque, on mène une diagonale, et qu'on joigne les centres de gravité des deux triangles qui composent le quadrilatère, le centre de gravité du quadrilatère sera sur cette ligne : si l'on mène la deuxième diagonale, le centre de gravité du quadrilatère devra également se trouver sur la ligne qui joint les centres de gravité des nouveaux triangles qui composent le quadrilatère : le centre de gravite du quadrilatère sera donc à l'intersection des deux lignes qui joignent les centres de gravité des triangles qui, deux à deux, composent le quadrilatère.

Il suffit donc de diviser en deux parties égales les côtés d'un quadrilatère, pour déterminer son centre de gravité.

10. Si l'on joint les centres de gravité des quatre triangles qui, deux à deux, composent le quadrilatère, on formera un nouveau quadrilatére, semblable au premier, placé dans une position renversée, et dont la surface sera $\frac{1}{9}$ de celle du quadrilatère primitif.

11. Les diagonales de ce nouveau quadrilatère, qui se coupent au centre de gravité du premier, sont parallèles aux diagonales de celui-ci : elles en sont le tiers, et les segments sont également le tiers des segments correspondants des diagonales primitives.

12. Ces dernières propriétés fournissent deux nouveaux moyens de trouver le centrè de gravité d'un quadrilatère.

1° Menez les diagonales · déterminez le centre de gravité de deux triangles ayant chacun une de ces diagonales pour côté : par chacun de ces points, menez une parallèle à l'autre diagonale : leur point d'intersection sera le centre de gravité cherché.

2° Menez une diagonale · cherchez le centre de gravité d'un des triangles : par ce point, menez une parallèle à la seconde diagonale, et sur cette parallèle, à partir du centre de gravité du triangle, portez une distance égale au tiers du segment opposé de la seconde diagonale ; l'extrémité de cette ligne sera le centre de gravité du quadrilatère.

13. Considérons maintenant les quatre triangles formés par les deux diagonales d'un quadrilatère quelconque et qui ont, pour sommet commun, le point d'intersection des deux diagonales.

Si l'on réunit les centres de gravité de ces triangles, l'on formera un parallélogramme dont les côtés passent par les centres de gravité des quatre grands triangles qui, deux à deux, composent le quadrilatère, de sorte que les centres de gravité des huit triangles que l'on forme en menant les diagonales d'un quadrilatère quelconque, se trouvent aux angles et sur les côtés d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles aux diagonales du quadrilatère, sont le tiers de ces mêmes diagonales et dont la surface, double du petit quadrilatère renversé qui lui est inscrit, est les $\frac{2}{9}$ de la surface du quadrilatère primitif.

14. Au moyen du petit quadrilatère, ou plutôt des centres de gravité des huit triangles que forment ses diagonales, on composera un nouveau parallélogramme et un nouveau quadrilatère inscrit : la surface de celui-ci sera $\frac{1}{9}$ du premier et par conséquent $\frac{1}{81}$ du quadrilatère primitif, tandis que la surface du nouveau parallélogramme en sera les $\frac{2}{81}$: l'on

pourra former ainsi une suite de parallélogrammes et de quadrilatères inscrits, semblables au quadrilatère primitif, qui seront alternativement renversés et redressés, dont les côtés et les diagonales seront successivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, etc. des côtés et des diagonales homologues du quadrilatère primitif, et dont les surfaces sont successivement $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{729}$, etc. de la surface primitive, celles des parallélogrammes successifs étant doubles des précédentes.

15. Les côtés du parallélogramme formé par les centres de gravité des quatre triangles qui composent le quadrilatère primitif coupent les segments des diagonales de ce quadrilatère au tiers de leur longueur; par conséquent, la portion de chaque diagonale comprise entre leur point d'intersection et la diagonale du petit quadrilatère renversé, diagonale qui est parallèle à celle du quadrilatère primitif et qui passe par son centre de gravité, cette portion de diagonale, disons-nous, est le tiers de la différence des segments de cette diagonale.

16. Cette propriété fournit un moyen nouveau de déterminer le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque.

Menez les diagonales AC et BD (*fig.* 81) : portez sur chacune d'elles, à partir de leur point d'intersection E et sur le plus grand segment ED, EA, une longueur EF, EG égale au tiers de la différence entre les deux segments correspondants DE et EB, EA et EC : par chacun des points F et G ainsi déterminés, menez une parallèle FH, GI à l'autre diagonale AC, BD : le point O d'intersection de ces deux lignes sera le centre de gravité cherché.

17. M. Poncelet, qui a fait faire tant de progrès à la mécanique physique et expérimentale, a indiqué, dans le cours

qu'il professait à la Faculté des sciences (Voyez *l'Écho du Monde savant*, 5e *année*, *n°* 360, 15 *août* 1838) une autre solution que nous croyons devoir rappeler ici.

Menez les diagonales AC, BD (*fig.* 82) : déterminez le milieu F de l'une d'elles ; prenez sur le plus grand segment DE de l'autre diagonale BD et à partir du sommet adjacent D, une longueur DG égale au plus petit segment BE ; joignez le point G, ainsi déterminé, avec le milieu F de la première diagonale AC . divisez cette ligne FG en trois parties égales : le point de division O, le plus voisin de la première diagonale AC, sera le centre de gravité cherché.

18 La ligne qui joint le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère et le centre de gravité de ce quadrilatère, jouit d'une propriété assez remarquable : c'est sur cette ligne que se trouvent les centres de gravité des quadrilatères semblables au quadrilatère primitif et dont les surfaces sont successivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, etc., $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{729}$, etc. de la surface de ce quadrilatère · c'est aussi sur cette ligne que se coupent les diagonales des deux séries de parallélogrammes dont les surfaces sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, etc., $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{81}$, $\frac{2}{729}$, etc. de la surface du quadrilatère primitif.

C'est donc à juste titre que nous appelons cette ligne . la ligne des centres.

19. Remarquons 1° que les diagonales du premier parallélogramme de la première série, c'est-à-dire, les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère primitif, se coupent, sur la ligne des centres, au quart de cette ligne le plus voisin du centre de gravité du quadrilatère, 2° que les diagonales du premier parallélogramme de la seconde série, c'est-à-dire, les lignes qui joignent les centres de gravité des triangles, opposés par le sommet, formés par

les diagonales du quadrilatère primitif, se coupent au milieu de la ligne des centres.

20. Ces propriétés de la ligne des centres conduisent, par leur simple énoncé, à deux nouveaux moyens de déterminer le centre de gravité d'un quadrilatère, mais qui ne valent pas ceux qui sont indiqués aux §§ 16 et 17 de la présente note.