

A. VACHETTE

**Solutions des problèmes 27 (p. 247), 15
et 18 (p. 351), 38 (p. 395), t. Ier**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 508-510

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2_508_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DES PROBLÈMES 27 (p. 247), 15 et 18
(p. 351), 38 (p. 395), t. I^{er}.

PAR M. A. VACHETTE,

Licencie es sciences.

Problème 27.

Soit la première équation $f(x) = 0$ du degré m ,
la deuxième $\varphi(y) = 0$ du degré n ,
l'équation cherchée $\psi(z) = 0$ sera du degré mn .

Désignons par S les sommes de $f(x)$, S' celles de $\varphi(y)$, S'' celles de $\psi(z)$.

Cherchons généralement S''_{2p} et S''_{2p+1}

$$\begin{aligned} S''_{2p} &= (y-x)^{2p} + \dots = mn(S'_{2p} + S_{2p}) - \\ &- \frac{2p}{1} \sum (y^{2p-1}x + yx^{2p-1}) + \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} \sum (y^{2p-2}x^2 + y^2x^{2p-2}) - \\ &- \dots \pm \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1 \cdot 2 \cdot p} \sum x^p y^p. \end{aligned}$$

On a \pm suivant que p est $\begin{matrix} \text{pair} \\ \text{ou} \\ \text{impair} \end{matrix}$

$$\begin{aligned} S''_{2p+1} &= (y-x)^{2p+1} + \dots = mn(S'_{2p+1} + S_{2p+1}) - \\ &- \frac{2p+1}{1} \sum (y^{2p}x - yx^{2p}) + \frac{(2p+1)2p}{1 \cdot 2} \sum (y^{2p-1}x^2 - y^2x^{2p-1}) - \\ &- \dots \frac{(2p+1)\dots(p+2)}{1 \cdot 2 \cdot p} \sum (y^p x - yx^p). \end{aligned}$$

On a \pm suivant que p est $\begin{matrix} \text{pair} \\ \text{ou} \\ \text{impair,} \end{matrix}$

ou remarquant que $\sum (y^k x^{k'} + y^{k'} x^k) = mn(S'_k S_{k'} + S'_{k'} S_k)$,
on aura

$$\begin{aligned}
 S'_{2p} &= mn \left\{ (S_{2p} + S'_{2p}) - \frac{2p}{1} (S'_{2p-1} S_1 + S'_1 S_{2p-1}) + \right. \\
 &\quad + \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} (S'_{2p-2} S_2 + S'_2 S_{2p-2}) - \\
 &\quad \left. - \dots \pm \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} S'_p S_p \right\} \\
 S'_{2p+1} &= mn \left\{ (S'_{2p+1} - S_{2p+1}) - \frac{2p+1}{1} (S'_{2p} S^1 - S'_1 S_{2p}) + \right. \\
 &\quad + \frac{(2p+1)2p}{1 \cdot 2} (S'_{2p-1} S_2 - S'_2 S_{2p-1}) - \\
 &\quad \left. - \dots \pm \frac{(2p+1) \dots (p+2)}{1 \cdot 2 \dots p} (S'_{p+1} S_p - S'_p S_{p+1}) \right\}
 \end{aligned}$$

Problème 15.

Appliquons à $f(x) = x^2 - px + q$ $m = 2$
 $\varphi(y) = y^3 - ay' + by - c$ $n = 3$

le degré de $\psi(\zeta)$ sera 6

$$\begin{aligned}
 S''_1 &= 6 (S'_1 - S_1) \\
 S''_2 &= 6 \{ (S'_2 + S_2) - 2S'_1 S_1 \} \\
 S''_3 &= 6 \{ (S'_3 - S_3) - 3(S'_2 S_1 - S'_1 S_2) \} \\
 S''_4 &= 6 \{ (S'_4 + S_4) - 4(S'_3 S_1 + S'_1 S_3) + 6S'_2 S_2 \} \\
 S''_5 &= 6 \{ (S'_5 - S_5) - 5(S'_4 S_1 - S'_1 S_4) + 10 (S'_3 S_2 - S'_2 S_3) \} \\
 S''_6 &= 6 \{ (S'_6 + S_6) - 6(S'_5 S_1 + S'_1 S_5) + 15(S'_4 S_2 + S'_2 S_4) - \\
 &\quad - 40S'_3 S_3 \}
 \end{aligned}$$

Si $f(x) = 0$ et $\varphi(y) = 0$ ont K racines communes, l'équation $\psi \zeta = 0$ a K racines nulles; on a donc ainsi un moyen de trouver le degré du plus grand commun diviseur entre deux polynômes d'une lettre, à coefficients numériques.

Problème 18.

Proposons-nous de chercher les sommes, deux à deux, des racines de la première avec celles de la deuxième : on aura

$$\begin{aligned}
 S''_{2p} &= mn \left\{ (S_{2p} + S'_{2p}) + \frac{2p}{1} (S_{2p-1}S'_1 + S'_{2p-1}S_1) + \right. \\
 &+ \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} (S_{2p-2}S'_2 + S'_{2p-2}S^2) + \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} S_p S'_p \left. \right\} \\
 S''_{2p+1} &= mn \left\{ \left(S_{2p+1} + S'_{2p+1} \right) + \frac{2p+1}{1} S_{2p} S'_1 + S'_{2p} S_1 + \dots + \right. \\
 &+ \frac{(2p+1)\dots(p+2)}{1 \cdot 2 \dots p} (S_{p+1} S'_p + S'_{p+1} S_p) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Solution du problème 38 (p. 395).

L'équation

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} - \text{etc.} - a^n = 0$$

revient à

$$x^n = (x+a)^n - x^n,$$

ou

$$2x^n = (x+a)^n,$$

extrayant les racines *n*^{èmes} on aura

$$x \sqrt[n]{2} = x+a \quad x = \frac{a}{\sqrt[n]{2} - 1}$$

mais $\sqrt[n]{2}$ a *n* valeurs que l'on obtient en multipliant $\sqrt[n]{2}$ prise arithmétiquement par les *n* racines *n*^{èmes} de 1, donc les *n* valeurs de 2 seront

$$x = \frac{a}{\sqrt[n]{2} \left(\cos \frac{u\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{u\pi}{n} \right) - 1},$$

u ayant les valeurs 0, 1, 2, ..., (n-1)