NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

THIBAULT

Sur la recherche des limites des racines d'une équation, et sur la détermination des racines commensurables

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 517-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__517_0>

SUR LA RECHERCHE DES LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION, ET SUR LA DETERMINATION DES RACINES COMMENSURABLES

PAR M. THIBAULT,
Professeur à Paris, licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

—

I. *Sur la recherche des limites des racines.*

On démontre dans tous les traités d'algèbre que $\sqrt[n]{\mathrm{N}}+1$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation $x^m+\mathrm{P}_1x^{m-1}+\ldots\ldots+\mathrm{P}_m=0$, N étant le plus grand des coefficients négatifs et n le nombre des termes qui précèdent le premier de ces coefficients. Cette limite, comme l'on sait, est presque toujours beaucoup trop élevée; la méthode de Lagrange (*) donne une limite généralement plus rapprochée, mais qui, pour l'ordinaire, surpasse de plusieurs unités celle qu'on trouve par la méthode de Newton. Or on peut, comme nous allons voir, parvenir au même but que par cette dernière méthode, par la décomposition du premier membre en diverses parties, décomposition qui n'est soumise à aucune règle particulière, et en suivant une marche plus simple, plus prompte, qui n'exige pas, comme celle de Newton, l'emploi des polynômes dérivés et souvent des substitutions nombreuses.

1. Observons d'abord que *la substitution d'un nombre* a

(*) Rappelons que la limite de Lagrange est $\sqrt[n]{\mathrm{N}}+\sqrt[n']{\mathrm{N}'}$, cette expression représentant la somme des deux plus grands nombres qu'on obtient en extrayant de chaque coefficient négatif la racine ayant pour indice le nombre de termes qui précèdent ce coefficient. (Voir les Nouvelles Annales de mathématiques, t. I, page 243.)

pour x *dans le polynôme* $P_0x^m + P_1x^{m-1} + \ldots\ldots + P_m$ *peut s'effectuer en calculant successivement, chacune au moyen de la précédente, les quantités*

$$P_0a + P_1 = T_1$$
$$T_1a + P_2 = T_2$$
$$T_2a + P_3 = T_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$T_{m-1}\,a + P_m = T_m\,;$$

car en substituant dans chacune de ces quantités l'expression de la précédente, on trouve :

$$T_2 = P_0a^2 + P_1a + P_2$$
$$T_3 = P_0a^3 + P_1a^2 + P_2a + P_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_m = P_0a^m + P_1a^{m-1} + \ldots\ldots + P_m\,;$$

c'est-à-dire que la dernière quantité T_m est le résultat de la substitution de a pour x dans $P_0x^m + P_1x^{m-1} + \ldots\ldots + P_m$ (*).

2. Lorsque P_0 est positif, il résulte de la loi de formation successive des quantités T_1, T_2, ... T_m que si, pour un nombre positif donné a, aucune d'elles n'est négative, chacune ne peut qu'augmenter, et par conséquent reste positive si l'on remplace a par un nombre plus grand. Ainsi, puisque T_m ou $P_0a^m + P_1a^{m-1} + \ldots\ldots + P_m$ serait toujours positif si on augmentait la valeur de a, il en résulte que le nombre substitué a est alors une limite supérieure des racines positives. Plus généralement, quel que soit le signe de P_0, on

---

(*) Telle est la marche qu'il faut employer pour trouver le plus promptement possible le résultat de la substitution d'un nombre a à la place de x dans un polynôme proposé. Le plus souvent, quelque grand que soit le degré du polynôme, on reconnaît par là dès les premiers calculs si le résultat de la substitution opérée complétement doit être positif ou négatif (c'est ce qui résulte des observations faites plus loin (4)), que le signe de T_{n+1}, ... T_m est le même que celui de T_n si cette dernière quantité surpasse ou égale numériquement le plus grand des coefficients de signe contraire au sien qui suivent P_n, a étant egal au moins à 2; or en effet l'objet unique de la substitution est le plus fréquemment de connaître le signe du résultat.

voit de même que *le nombre positif* a *est une limite supérieure si aucune des quantités* T_1, T_2, ... T_m *n'est de signe contraire à celui de* P_0.

3. Si une ou plusieurs des quantités T_1, T_2, ... étaient de signe contraire à celui de P_0, il ne faudrait pas toujours rejeter le nombre a comme n'étant pas une limite assurée. Nous allons démontrer en effet que *si une ou plusieurs de ces quantités, savoir :* T_n *ou* $T_{n-1}a+P_n$, $T_{n'}$ *ou* $T_{n'-1}a+P_{n'}$ .... *sont de signe contraire à* P_0, *mais que* $T_{n-1}a+\frac{1}{2}P_n$, $T_{n'-1}a+\frac{1}{2}P_{n'}$, ... *soient de même signe que* P_0 *ou nuls*, a *est encore une limite supérieure, lorsque* T_m *est de même signe que* P_0. Il suffira pour cela de faire voir que toutes les dérivés de T_m, prises par rapport à a, sont alors de même signe que P_0, puisque en remplaçant a par $a+h$ dans T_m on obtient $T_m+T'_m a+\frac{1}{2}T''_m a^2+\frac{1}{2.3}T'''_m a^3+$ .....; or, cette proposition résulte de ce que plus généralement toutes les dérivées de chacune des quantités T_1, T_2, ... sont alors de même signe que P_0.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que P_0 soit positif, nous démontrerons d'abord qu'il en est de même de toutes les dérivées premières T'_1, T'_2, ..., ensuite que la même chose a lieu pour toutes les dérivées secondes T''_1, T''_2, ... , et ainsi de suite.

Pour démontrer que toutes les dérivées premières sont positives, il suffit de faire voir que si cela est vrai pour T'_1, T'_2, ... T'_n, il en sera de même pour T'_{n+1}. Or, de $T_{n+1}=T_n a+P_{n+1}$ on déduit $T'_{n+1}=T_n+T'_n a$; donc si T_n n'est pas négatif, T'_{n+1} est positif, puisque par hypothèse T'_n est positif. Mais si T_n est négatif, remplaçons T_n et T'_n par leurs valeurs $T_{n-1}a+P_n$, $T_{n-1}+T'_{n-1}a$, il vient

$T'_{n+1} = 2\left(T_{n-1}a + \frac{1}{2}P_n\right) + T'_{n-1}a^2$, quantité encore positive, puisque par hypothèse T'_{n-1} est positif, et que, d'après la condition énoncée, $T_{n-1}a + \frac{1}{2}P_n$ est positif ou nul. Maintenant, comme on a $T'_1 = P_0$ quantité positive, T'_2 est donc aussi positif, par conséquent aussi T'_3, et ainsi de suite.

De même, pour démontrer que les dérivées secondes sont toutes positives, il suffira de faire voir que si cela a lieu pour $T''_1, T''_2, \ldots T''_n$, il en sera de même pour T''_{n+1}. Or, de $T'_{n+1} = T_n + T'_n a$ on tire $T''_{n+1} = 2T'_n + T''_n a$, quantité positive, puisque T''_n l'est par hypothèse, de même que T'_n d'après ce qui précède. Mais on a $T''_1 = 0$, d'où $T''_2 = 2T'_1 + T''_1 a = 2P_0$ quantité positive, donc T''_3 est aussi positif, par conséquent aussi T''_4, et ainsi de suite.

La même démonstration s'appliquera évidemment aux dérivées troisièmes, quatrièmes, etc.

4. Bien souvent il suffit de calculer les premières des quantités $T_1, T_2, \ldots . T_m$ pour connaître dès lors si a doit être ou non admis comme limite. Ainsi, *lorsque le nombre essayé* a *n'est pas moindre que* 2 *aussitôt qu'on est parvenu à une quantité* T_n *au moins égale numériquement au plus grand des coefficients de signe contraire au sien qui suivent* P_n, *le nombre* a *doit dès lors être admis pour limite ou rejeté*, *selon que* T_n *est de même signe que* P_0, *ou de signe contraire*, car alors toutes les quantités suivantes $T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots . T_m$ sont de même signe que T_n. En effet, T_{n+1} ou $T_n a + P_{n+1}$ est alors de même signe que T_n et au moins égal à $2T_n + P_{n+1}$ ou $T_n + (T_n + P_{n+1})$, quantité dont la seconde partie est de même signe que la première T_n ; ainsi T_{n+1} est au moins égal à T_n, et par conséquent au plus grand coefficient de signe contraire qui se trouve après P_{n+1}. On étendra suc-

cessivement la même démonstration à T_{n+2}, T_{n+3}, ... T_m.

5. Appliquons, par exemple, la méthode indiquée à la recherche des limites supérieures et inférieures des racines positives et des racines négatives de l'équation

$$x^7 - 3x^6 - 8x^5 - 26x^4 + 4x^3 - 31x^2 - 28x + 8 = 0.$$

A l'égard des racines positives on trouve 6 pour limite supérieure la plus rapprochée ; car en faisant $a = 5$ on a successivement

$$T_1 = 5 - 3 = 2,\ T_2 = 2.5 - 8 = 2,\ T_3 = 2.5 - 26 = -16.$$

et de plus $2.5 - \frac{26}{2} < 0$; donc 5 doit être rejeté (3).

En faisant ensuite $a = 6$ on trouve

$$T_1 = 6 - 3 = 3,\ T_2 = 3.6 - 8 = 10,\ T_3 = 10.6 - 26 = 34 ;$$

or, cette dernière quantité, qui est positive, surpasse numériquement le plus grand coefficient numérique suivant, qui est -31 ; donc 6 est une limite (4).

Passons à la limite inférieure, et pour cela changeons dans la proposée x en $\frac{1}{x}$; il vient

$$8x^7 - 28x^6 - 31x^5 + 4x^4 - 26x^3 - 8x^2 - 3x + 1 = 0.$$

On trouve de suite 5 pour moindre limite des racines positives de cette transformée. En effet, pour $a = 4$ on a

$$T_1 = 8.4 - 28 = 4, \quad T_2 = 4.4 - 31 = -15 ;$$

or T_2, qui est de signe contraire à P_0 ou $+8$, surpasse numériquement 4, plus grand des coefficients de même signe que P_0 qui suivent -31 ; donc 4 doit être rejeté (3). En second lieu, pour $a = 5$ on a

$$T_1 = 8.5 - 28 = 12, \quad T_2 = 12.5 - 31 = 29 ;$$

or T_2, de même signe que P_0, surpasse numériquement -26, plus grand des coefficients négatifs qui suivent -31 ;

donc 5 est une limite (4). Ainsi $\frac{1}{5}$ est la limite inférieure cherchée pour la proposée.

(On voit que le calcul des quantités T_1, T_2. etc., pour l'équation transformée peut s'exécuter sur la proposée même, en considérant les coefficients dans un ordre inverse.)

Pour les racines négatives, changeons x en $-x$ dans l'équation proposée, c'est-à-dire les signes des coefficients des puissances paires ou des puissances impaires de x; on a

$$x^7 + 3x^6 - 8x^5 + 26x^4 + 4x^3 + 31x^2 - 28x - 8 = 0.$$

Cette transformée admet 1 pour plus simple limite supérieure. En effet $a=0$ donne évidemment -8 pour la valeur du premier membre; ensuite $a=1$ donne $T_1=4$, $T_2=4-8=-4$ $\left(\text{mais en même temps on a } 4 - \frac{8}{2} = 0\right)$, $T_3 = -4 + 26 = 22$. et les quantités suivantes T_4, etc., sont toutes évidemment positives.

Pour la limite inférieure la plus simple de cette transformée, on trouve $\frac{1}{2}$. En effet, si, en prenant les coefficients à rebours, on forme $T_1 = -8a - 28$, $T_2 = T_1 a + 31$, etc, on a pour $a=1$ les valeurs

$$T_1 = -36;\ T_2 = -36 + 31 = -5,$$
$$T_3 = -5 + 4 = -1,\ T_4 = -1 + 26 = 25,$$

et toutes les autres quantités T_5, etc., sont évidemment positives ou de signe contraire à -8. Ensuite, par $a=2$ on a $T_1 = -8.2 - 28 = -44$, quantité négative ou de même signe que -8, et surpassant numériquement 31, plus grand des coefficients positifs qui précèdent -28.

Les limites des racines de la proposée sont donc $\frac{1}{5}$, 6 pour les racines positives, et $-\frac{1}{2}$, -1 pour les racines négatives.

ce qui est exactement le même résultat, qu'on trouve bien plus longuement par la méthode de Newton. Par la méthode ordinaire on aurait trouvé $\frac{1}{5}$, 32 et $-\frac{1}{3}$, -29.

On voit par cet exemple que la recherche des limites par la méthode proposée n'exige pas en général plus de temps pour une équation d'un degré très-élevé que pour celles du troisième ou du quatrième degré. Du reste, on peut s'assurer que cette méthode conduit aux limites les plus simples des équations traitées à cet égard par la méthode de Newton, ou par la décomposition du premier membre dans les traités d'algèbre de MM. Lefébure, Mayer et Choquet, Bourdon.

II. *Sur la recherche des racines commensurables.*

La recherche des racines entières s'effectue, comme on sait, par une suite de divisions et d'additions alternatives. Si a est une racine entière de $P_0x^m+P_1x^{m-1}+\ldots+P_m=0$, la règle prescrite pour le reconnaître est représentée par la suite des identités

$$\frac{P_m}{a}=Q_{m-1},\quad \frac{Q_{m-1}+P_{m-1}}{a}=Q_{m-2},\ldots \frac{Q_1+P_1}{a}=Q_0,\ Q_0+P_0=0$$

Lorsque l'on a ainsi déterminé toutes les racines entières $a, b, c,\ldots$ en opérant de la même manière sur les coefficients de l'équation proposée, on en débarrasse l'équation en effectuant le produit $(x-a)(x-b)\ldots\ldots$, par lequel on divise $P_0x^m+\ldots+P_m$: après quoi il faut encore chercher si ces mêmes nombres ne sont pas encore racines de l'équation obtenue pour quotient.

Or, on peut suivre dans la recherche des racines entières une marche plus simple, qui d'abord abrége cette recherche quand il y a plusieurs racines entières, et qui en outre débarrasse immédiatement l'équation des racines sans autre calcul.

Observons que $P_m + P_{m-1}x + \ldots + P_0 x^m$ divisé par $a-x$ n'est autre chose que $Q_{m-1} + Q_{m-2}x + \ldots. + Q_0 x^{m-1}$. Ainsi $Q_0 x^{m-1} + Q_1 x^{m-1} x \ldots. + Q_{m-1} = 0$ est l'équation débarrassée de la racine a. Opérons sur celle-ci pour reconnaître une nouvelle racine b, (ou pour vérifier si a n'est pas encore racine), elle sera débarrassée de la nouvelle racine, et ainsi de suite, les calculs allant toujours en se simplifiant.

Comme l'équation proposée peut admettre les racines ± 1 une ou plusieurs fois, il faut opérer pour ces nombres comme pour toute autre diviseur de P_m, et en débarrasser l'équation immédiatement s'ils sont racines, c'est-à-dire s'ils conduisent à $Q_0 + P_0 = 0$. C'est même par les deux nombres ± 1 qu'il convient de commencer la recherche des racines entières, car la valeur $Q_0 + P_0$ trouvée par ± 1 n'est autre chose que le résultat de la substitution de ± 1 dans $P_0 x^m + \ldots + P_m$ (au signe près pour la substitution de -1, si m est impair), substitution qui donne, comme on sait, des caractères pour rejeter de suite plusieurs diviseurs de P_m comme n'étant pas racines. En effet, on a

$$P_0 + Q_0 = P_0 + \frac{P_1 + Q_1}{a} = P_0 + \frac{P_1}{a} + \frac{P_2 + Q_2}{a} =$$

$$= P_0 + \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{a^2} + \frac{P_3 + Q_3}{a^3} = \ldots = \frac{P_0 a^m + \ldots + P_m}{a^m}.$$

Soit par exemple l'équation $x^7 + 3x^6 - 11x^5 - 23x^4 + 18x^3 - 28x^2 - 56x + 96 = 0$. (96 ayant un grand nombre de diviseurs on diminuerait beaucoup les essais en observant que par le procédé indiqué dans l'article précédent, on trouve de suite -5 et $+4$ pour limites des racines réelles.)

Pour plus grande facilité des calculs je dispose ainsi les opérations :

x^7	$+3x^6$	$-11x^5$	$-23x^4$	$+10x^3$	$-28x^2$	$-56x$	$+96$	nomb. essayés
0,	-1,	4,	7,	30,	12,	40,	96	1 racine
	180,	181,	185,	178,	148,	136,	96	1
	-48,	9,	-45,	38,	-68,	56,	-96	-1
	.	.	.	28,	26,	44,	48	2
	0,	1,	2,	-11,	-8,	4,	-48	-2 racine
		0,	-1,	0,	11,	-14,	24	-2 racine
			.	6,	-12,	13,	-12	-2
			0,	1,	3,	-2,	8	3 racine
				0,	-1,	$+1$,	-2	-4 racine

$x^2 - x + 2 = 0$, équation débarrassée de racines entières.

En prenant $a = 1$, on trouve $\frac{96}{a} = 96$, que l'on écrit à côté de 1 sous le dernier terme du premier membre. On a ensuite $\frac{96-56}{a} = 40$ qu'on écrit à gauche sous le coefficient -56. Puis on trouve $\frac{40-28}{a} = 12$ qu'on écrit sous -28, et ainsi de suite. En achevant de la sorte jusqu'au dernier coefficient on voit que 1 est racine, et en même temps que l'équation débarrassé de la racine 1 est $-x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 30x^3 + 12x^2 + 40x + 96 = 0$.

J'opère de même sur cette dernière équation dont les coefficients se trouvent déjà tout écrits dans l'ordre convenable pour vérifier si les nombres $1, -1$, en sont racines ; je trouve qu'ils ne le sont pas et de plus que les résultats de leur substitution est 180 et 48. Ainsi 180 doit être divisible par toutes les racines entières diminuées de l'unité et 48 par toutes les racines augmentées de l'unité ; caractères qui excluent tous les diviseurs de 96 excepté $\pm 2, \pm 3, -4$. On trouve ensuite que 2 n'est pas racine de l'équation debarrassée de la racine 1, mais que -2 en est racine ; on obtient en même temps $x^5 + 2x^4 - 11x - 8x^2 + 4x - 48 = 0$ pour l'équation débarrassée des racines $1, -2$.

Opérant de nouveau sur les coefficients de cette dernière qui sont déjà tout disposés convenablement dans le tableau, on trouve que — 2 est encore racine et que l'équation débarrassée de trois racines reconnues est $-x^4+11x^2-14x+24=0$.

On trouve ensuite de même que la nouvelle équation n'admet plus pour racine — 2, mais qu'elle admet 3 ; de plus on voit que l'équation débarrassée des quatre racines trouvées est $x^3+3x^2-2x+8=0$.

Il est inutile d'essayer maintenant les nombres 3, — 3 qui ne divisent plus le dernier terme 8, mais on trouve que — 4 est racine, et que l'équation débarrassée encore de cette racine est $x^2-x+2=0$.

Cette dernière n'a plus de racines entières, puisque son dernier terme n'admet plus pour diviser le nombre — 4, qui est le dernier nombre à essayer.

L'équation proposée revient donc à

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x+4)(x^2-x+2)=0.$$

Note. La méthode de Newton, consiste à rendre positives, toutes les fonctions dérivées. L'observation ingénieuse de M. Thibault fournit un criterium pour reconnaître si ces fonctions sont positives, sans avoir besoin de les calculer; moyen d'abréviation astreint à la condition assez stricte, que T_m soit positif; car dans une équation P_0 est toujours censé positif. La méthode de Lagrange a l'avantage de donner une limite, immédiatement. Nous rappellerons à cette occasion trois théorèmes sur les limites des racines que Biet a consignés dans les Annales de Gergonne (tome 6, p. 112). Voici le premier théorème : Dans chaque suite de coefficients négatifs, prenez le plus grand positivement, et divisez-le par la somme des coefficients positifs qui le précèdent; augmentez le quotient d'une unité ; la plus grande somme ainsi obtenue, est la limite supérieure des racines positives.

Lorsque les coefficients négatifs sont petits relativement aux coefficients positifs, ce théorème fournit de suite, une limite très-rapprochée. Dans un autre article nous rapporterons les trois théorèmes, avec les démonstrations. Il serait intéressant d'avoir une méthode directe, sans recourir à l'élimination, pour trouver les racines entières *complexes*. C'est le nom que donne M. Gauss, aux racines imaginaires $a+b\sqrt{-1}$ lorsque a et b sont des nombres entiers. Il est évident que dans ce cas, le dernier terme tout connu, doit admettre des diviseurs bi-carrés. Les solutions que procurent ces diviseurs doivent satisfaire aux deux équations à deux inconnues, qu'on obtient en remplaçant l'inconnue x par le type $z+y\sqrt{-1}$.

Tm.