NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RÉALIS

Sur le parallélogramme des forces

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 527-532

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__527_1>

SUR LE PARALLÉLOGRAMME DES FORCES.

PAR M. S. REALIS.

La démonstration suivante du parallélogramme des forces n'est qu'une modification de celle que M. Poisson a donnée dans son Traité de mécanique; j'ai pensé qu'elle pourrait ne pas être inutile dans l'enseignement élémentaire, à cause qu'en démontrant la proposition pour deux forces faisant entre elles un angle commensurable avec l'angle droit, on y évite de considérer cet angle comme résultant de la somme d'une infinité d'autres infiniment petits, ainsi qu'on le fait dans la démonstration citée. Je me borne à considérer le cas de deux forces égales, puisqu'il est très-facile d'étendre ensuite la proposition au cas de deux forces quelconques.

Il s'agit donc de prouver que la résultante de deux forces égales, appliquées en un même point et représentées par des droites prises sur leurs directions à partir de ce point, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du losange construit sur les deux forces données.

Il est d'abord évident que cette résultante doit passer par le milieu de l'angle des composantes; sa direction est donc connue, et il ne reste que sa grandeur à déterminer. Soient P la valeur commune des composantes, $2x$ l'angle compris entre leurs directions, R la valeur de la résultante; pour une valeur donnée de x, R doit varier proportionnellement à P, donc on pourra poser :

$$R = P\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de x qu'il s'agit de déterminer. Par la nature même de la question on a $\varphi(0) = 2$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; il reste à examiner ce que devient $\varphi(x)$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour cela, on regardera chacune des forces P comme la résultante de deux forces Q, égales entre elles et comprenant entre leurs directions l'angle arbitraire $2z$, en sorte que le système des deux forces P se trouvera remplacé par le système de quatre autres forces Q, égales, dont les deux qui avoisinent la résultante R font entre elles l'angle $2x - 2z$, et les deux autres l'angle $2x + 2z$. On aura donc $P = Q\varphi(z)$, et comme la force R reste la même, soit qu'elle provienne de la composition des deux forces P, ou de celle des quatre forces Q, il en résultera

$$R = P\varphi(x) = Q\varphi(x)\varphi(z) = Q\varphi(x+z) + Q\varphi(x-z),$$

d'où

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z).$$

C'est à l'aide de cette équation qu'il faut tâcher de reconnaître la forme de la fonction cherchée.

Il y a un cas dans lequel on détermine immédiatement la valeur de la fonction, c'est le cas de $x = z = \frac{\pi}{4}$. On tire en effet de l'équation (A)

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi(0);$$

or,
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0; \quad \varphi(0) = 2;$$

donc
$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},$$

et comme $P\sqrt{2}$ n'est autre chose que la diagonale du carré dont le côté est P, on voit que la règle du parallélogramme des forces se trouve vérifiée dans le cas de deux forces égales faisant entre elles un angle droit (*).

De l'équation (A), en y faisant successivement $x = z$, $2z$, $3z$, $4z$,...$(n-1)z$, on déduit

$$
\text{(B)} \quad
\begin{aligned}
\varphi(2z) &= \varphi(z)^2 - 2 \\
\varphi(3z) &= \varphi(z)^3 - 3\varphi(z) \\
\varphi(4z) &= \varphi(z)^4 - 4\varphi(z)^2 + 2 \\
\varphi(5z) &= \varphi(z)^5 - 5\varphi(z)^3 + 5\varphi(z) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$\varphi(nz) = \varphi(z)^n - n\varphi(z)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}\varphi(z)^{n-4} - \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3}\varphi(z)^{n-6} + \ldots\ldots$$

(*) Sans recourir à l'équation (A), il est très-facile de démontrer directement le cas de deux forces égales à angle droit. Soient appliquées en un point donné deux forces Q égales et directement opposées, et une force $R = 2Q$ agissant perpendiculairement à leur direction. La résultante du système sera évidemment R. Soit P la résultante des deux forces égales Q et $\frac{1}{2}$ R; on pourra substituer aux trois forces données, deux forces P à angle droit, égales entre elles et on verra immédiatement que si les forces P étaient plus grandes ou plus petites que les diagonales des carrés construits sur leurs composantes, la résultante R serait plus petite ou plus grande que la diagonale du carré construit sur les composantes P. Pour éviter cette contradiction, il faut nécessairement admettre que la résultante de deux forces égales à angle droit est représentée par la diagonale du carré construit sur les composantes.

Ces relations sont identiques avec celles qui existent entre les doubles cosinus des différents multiples d'un arc et le double cosinus de l'arc simple, et s'obtiennent de la même manière, à cause qu'on peut satisfaire à l'équation (A) en posant $\varphi(x) = 2\cos x$, et par suite

$$\varphi(z) = 2\cos z;\ \varphi(x+z) = 2\cos(x+z);\ \varphi(x-z) = 2\cos(x-z).$$

Il s'en suit donc que si, pour une valeur donnée de z, on a $\varphi(z) = 2\cos z$, on est en droit d'en conclure $\varphi(nz) = 2\cos nz$. Mais si pour $nz = \alpha$ on a $\varphi(nz) = 2\cos\alpha$, on ne pourra pas en conclure $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{n}$, car l'équation

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n - n\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n-4} - \ldots - 2\cos\alpha = 0$$

admettra par sa nature les n racines que donne la formule $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n}$ en y faisant $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, en sorte qu'il y aura incertitude sur la véritable valeur de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$. Cependant, dans le cas de $n = 2$, les deux valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ étant égales et de signe contraire, c'est évidemment la valeur positive qui satisfait à la question, de manière qu'on aura $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}$; il en résulte aussi $\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{4}$, et en général $\varphi\left(\frac{\alpha}{2^\mu}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2^\mu}$.

Cela posé, il ne sera pas difficile de prouver que la valeur de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, qui correspond à $k = 0$, est la seule admissible dans la question qui nous occupe, quel que soit le nombre entier n.

D'abord, en vertu de l'équation $\varphi(2z) = \varphi(z)^2 - 2$, on peut conclure de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n}$ cette équation

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{2n}$$

et en général

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2^{\nu}n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{2^{\nu}n};$$

de cette dernière formule, et en vertu encore des équations B), on déduit

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2^{\mu}}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2^{\mu-1}}+\frac{\alpha}{2^{\mu}}\right).$$

Maintenant on voit bien que si l'on suppose $\mu-1$ égal à l'exposant de la plus grande puissance de 2 contenue dans k, le quotient de $\frac{k}{2^{\mu-1}}$ sera un nombre impair, et on obtiendrait

$$\varphi\frac{\alpha}{2^{\mu}} = -2\cos\frac{\alpha}{2^{\mu}};$$

on voit de même que toutes les valeurs de $\mu-1$ supérieures à cet exposant mèneraient à des valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2^{\mu}}\right)$ incompatibles avec la véritable valeur qu'on a trouvée égale à $+2\cos\frac{\alpha}{2^{\mu}}$. Ainsi, la supposition de k différent de zéro dans la formule $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n}$, ne saurait convenir à la question.

Ayant donc $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)=2\cos\frac{\alpha}{n}$, on aura aussi $\varphi\left(\frac{m\alpha}{n}\right)=2\cos\frac{m\alpha}{n}$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Il suit de là que si un angle α, différent de zéro, vérifie l'équation $\varphi(x) = 2\cos\alpha$, tout angle $x = \frac{m\alpha}{n}$, commensurable avec α, vérifiera à son tour l'équation $\varphi\left(\frac{m\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{m\alpha}{n}$, ou

$\varphi(x) = 2\cos x$; or, en prenant $\alpha = \frac{\pi}{4}$ on a

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4},$$

donc, etc. Pour un angle x incommensurable avec α on aura encore $\varphi(x) = 2\cos x$, car les nombres m et n pourront toujours être choisis de manière que $\frac{m\alpha}{n}$ diffère aussi peu qu'on voudra de x.

Si l'on achève maintenant le losange des deux forces P, représentées en grandeur et en direction par deux droites faisant entre elles l'angle $2x$, la grandeur de la diagonale sera $2P\cos x$. Par ce qui précède, la résultante des forces P coupe en deux parties égales l'angle $2x$ et a pour expression $R = 2P\cos x$; elle est donc représentée en direction et en intensité par la diagonale du losange.