NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

COUSINERY

Note sur les transversales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 66-71

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__66_0>

NOTE SUR LES TRANSVERSALES.

PAR M. COUSINERY,
Ingénieur en chef au corps royal des ponts et chaussées.

Au nombre des propriétés qui devraient depuis longtemps faire partie des éléments de géométrie, on peut ranger en première ligne celles qui concernent les transversales; il ne leur manque pour y prendre définitivement la place qui leur est due, que de se rattacher à une théorie assez simple pour ne pas constituer une richesse encombrante, et qui puisse leur imprimer ce caractère d'évidence presque trivial, dont les axiomes fournissent le modèle, et en dehors duquel il n'est pas de vérités réellement élémentaires.

A l'appui de ces réflexions, qui nous ont été suggérées par la lecture de deux articles insérés dans le dernier numéro des *Annales de Mathématiques*, nous allons essayer s'il ne serait pas possible d'aborder le même sujet par la voie directe, en faisant dépendre les théorèmes qui s'y trouvent démontrés, de la géométrie à trois dimensions, à laquelle il nous semble qu'ils appartiennent de préférence.

On sait que, dans l'espace, deux droites quelconques sont respectivement divisées en parties égales par leur rencontre avec une série de plans parallèles équidistants; dès lors, si on les projette toutes deux sur l'un de ces plans (que nous pouvons supposer horizontaux pour fixer les idées); et qu'à partir du plan de projection, on numérote par ordre ces mêmes intersections, la figure présentera ce que l'on appelle deux *échelles de pente* (*). En joignant alors, de l'une à l'autre échelle, les points qui portent une graduation identique, on obtiendra la projection d'une série d'horizontales s'appuyant sur les deux échelles, et constituant ainsi les génératrices d'un paraboloïde réglé. Elles devront donc se trouver tangentes à la projection du contour apparent de la surface, courbe dans laquelle il nous sera facile de reconnaître une parabole ; puisqu'elle est du second ordre, et qu'elle a une de ses tangentes dont deux points sont situés à l'infini : celle qui réunirait les deux points de graduation identique, correspondants sur chaque échelle à un nombre infiniment élevé.

Si l'on imagine maintenant une troisième droite faisant partie du système directeur auquel appartiennent les deux échelles primitives, et s'appuyant pour cela sur toutes les horizontales, il est évident qu'elle se trouvera encore divisée en parties égales à chacun de leur point de rencontre ; et que par suite sa projection affectera à son tour la *forme d'échelle.* Et comme cette dernière forme appartiendra aussi bien à la directrice qu'à la génératrice qui se trouvent superposées dans un même plan projetant, il s'ensuit qu'en n'envisageant sur la surface que ce double faisceau de lignes, chacune d'elles sera divisée en parties égales par sa rencontre avec toutes les autres. Cette belle propriété du paraboloïde étant projective devrait se reproduire, en plan, d'une manière absolue ; mais elle offre, sous ce dernier rapport, une de ces exceptions qu'il est important de signaler ; et cela, parce qu'elle n'est qu'apparente.

Admettons que les deux premières échelles directrices soient disposées comme les présente la figure ci-jointe (*fig.* 9) ; l'un des points de division de ab, le cinquième par exemple,

(*) Dénomination adoptée dans les epures de projection mixte ou cotée, qui sont employées pour projeter et decrire les travaux de fortification.

verticalement situé au-dessus du zéro de *cd*. Si nous menons les horizontales 1, 2, 3, 4, etc., chacune d'elles sera bien divisée en parties égales; mais les portions ee', $e'e''$, $e''e'''$, etc., qui constituent les côtés du polygone circonscrit à la courbe contour apparent, feront exception à cette loi, et seront doubles de leurs homologues. Il y a donc sur chacun d'eux un point de division que la projection horizontale n'a pu rendre, bien qu'il existe dans l'espace. C'est précisément celui où les deux éléments linéaires qui se superposent projectivement se rencontrent eux-mêmes; comme tel, il appartient à la fois au contour apparent et au plan tangent vertical qui contient ces deux lignes; et il se projette sur la trace ee' de ce dernier au point *o* où celle-ci est tangente à la projection du contour apparent; c'est donc le point de contact parabolique de chacun des éléments ee', $e'e''$, $e''e'''$, etc., en le restituant sur toute la figure, ce qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il est partout soumis à la loi d'égale subdivision, le réseau de toutes ces lignes reproduit, en plan, la remarquable symétrie que nous avons déjà signalée dans l'espace. Nous en conclurons le théorème suivant : *si on subdivise une tangente à la parabole en parties égales, à partir du point de contact, et que par les* n *points de division, on mène autant d'autres tangentes à la courbe, chacune d'elles sera partagée en parties égales par sa rencontre avec toutes les autres. — Une autre tangente quelconque sera divisée par ce réseau de lignes dans les mêmes conditions d'égalité; excepté que, pour cette dernière, le point de contact ne fera plus partie des subdivisions égales.*

Théorème duquel on déduira sans peine les relations de proportionnalité des transversales non concourantes, et qui les complète sous un certain rapport, en signalant un nouveau point de division, dont il faut nécessairement tenir compte, puisqu'il jouit des mêmes propriétés, et provient d'une même origine.

Pour l'intelligence de ceux qui n'auraient pas l'habitude de lire dans l'espace, au moyen d'une seule projection cotée, nous allons ajouter à la figure ci-dessus une des formes de projection verticale que ses cotes impliquent et déterminent.

Nous prendrons, pour cela, notre ligne de terre *mn* perpendiculaire à la direction de la génératrice horizontale 5. Celle-ci se projettera dès lors, en un seul point *h*, que l'on peut d'ailleurs choisir à volonté sur le prolongement de la direction *cd*. Toutes les échelles (ou directrices) devant s'appuyer sur cette horizontale, viendront concourir en *h*, et prendront leur origine au point où elles rencontrent l'horizontale zéro qui se projette elle-même suivant la ligne de terre *mn*. Les autres horizontales 1, 2, 3 et 4, partageront l'espace intermédiaire en cinq bandes égales. — Comme on peut le reconnaître sans peine, cette seconde projection ramène à la forme exclusivement élémentaire (un faisceau parallèle et l'autre concourant en un seul point *h*) les transversales qui se trouvaient non concourantes dans la projection corrélative; l'une de ces figures fournit donc l'explication directe des propriétés métriques de l'autre, et leur dépendance mutuelle résume ainsi, sous une forme tangible et presque toute matérielle, les idées que nous nous étions proposé de mettre en relief.

Quant aux transversales concourantes qui vont aboutir à une même courbe quelconque, il est encore plus simple d'y reconnaître la projection d'un cône dont les transversales figurent les génératrices, dont la courbe donnée constitue la base plane et dont le sommet, situé à une hauteur quelconque, correspond verticalement au-dessus du point de concours. Ces données admises, un plan sécant, parallèle à la base, coupera le cône suivant une courbe semblable et semblablement placée, et divisera toutes les génératrices en parties proportionnelles. Celui qui les partagera également en deux, donnera la section particulière dont la surface égalera le quart de celle de la courbe donnée.

Cette dernière section, que nous appellerons *section conique sous-double*, rend le problème que s'était proposé M. Midy, susceptible d'une solution directe : ainsi, dans le cas particulier où le pôle par lequel viennent passer toutes les cordes fait partie de la courbe qui les intercepte, la section conique sous-double résout *immédiatement* le problème; et, dans le cas contraire, il est toujours possible d'en ramener les données à la supposition précédente, en substituant à la proposée une nouvelle courbe qui, sans rien changer aux lieux des centres cherchés, vienne elle-même passer par le pôle. Ces deux courbes sont dites alors : *polairement concentriques*. Il suffit, pour établir cette relation, qu'elles interceptent sur les mêmes rayons vecteurs des cordes superposées, dont le centre commun reste partout invariable. Si l'on remarque, en outre, qu'une relation identique doit exister, par similitude, entre leurs deux sections coniques sous-doubles, on en tire la règle suivante : *Le lieu des centres des cordes qui émanent d'un même point, se trouve sur la courbe polairement concentrique à la section conique sous-double de la proposée. Le pôle en fait nécessairement partie* (*).

Or, deux cercles décrits du même centre sont polairement concentriques par rapport à tous les points de leur plan. Il en est de même pour deux ellipses concentriques semblables et semblablement placées, envisagées comme les projections de deux cercles; enfin, une hyperbole et ses asymptotes, et par suite toutes les hyperboles qui ont mêmes asymptotes

(*) Comme nous n'avons rien préjugé, dans ce qui précède, sur la nature de la courbe primitive, rien n'exige qu'elle soit algébrique.

jouissent de la même propriété : les centres des cordes qui émanent d'un même point y restent invariables. Donc, toutes les fois que la courbe primitive est du second degré, le lieu des centres de ses cordes se trouve sur une courbe semblable et semblablement placée, qui passe par le pôle, et qui est concentrique à la section conique sous-double ; ensemble de conditions qui la déterminent complétement.

Dans un prochain article, nous appliquerons ces principes à une question qu'on propose quelquefois aux candidats ; et nous expliquerons les anomalies auxquelles donne lieu ce genre de problèmes : elles se présentent toutes les fois que le pôle est extérieur à la courbe primitive : il existe alors des cordes imaginaires, dont le centre seul est réel ; et, quand on néglige d'en tenir compte, la courbe cherchée se trouve nécessairement interrompue dans toute la partie qui leur correspond.

Nous indiquerons enfin, un conoïde réglé qui contient à la fois la courbe proposée, le lieu des centres, et le pôle commun. Les courbes s'y trouvent l'intersection de trois plans équidistants parallèles, ce qui rattache encore ce genre de propriétés à la proportionnalité dans l'espace : à celle qui résulte de la division d'un certain faisceau de lignes concourantes ou non concourantes par une suite de plans parallèles.