NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIGNAL

Question d'agrégation. Solution de la question de mécanique proposée au concours de 1844

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 112-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__112_1>

QUESTION D'AGRÉGATION.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE PROPOSÉE AU CONCOURS DE 1844.

PAR M. VIGNAL,
professeur de mathématiques.

Question de mécanique proposée au concours d'agrégation pour les sciences mathématiques de l'année 1844.

Déterminer les lois des petites oscillations d'un fil flexible, inextensible et sans masse, suspendu à un point fixe et chargé de deux points matériels pesants, en supposant qu'à l'origine du mouvement, les deux points materiels n'aient pas de vitesse et qu'ils se trouvent avec le point de suspension sur une même ligne droite qui s'écarte très-peu de la verticale.

Chercher les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

Prenons le point fixe F (*fig.* 13) pour origine, et la verticale menée par ce point pour axe des y; x et y étant les coordonnées de l'un des points m au bout d'un temps quelconque t ; x', y', celles de l'autre point m', au bout du même temps ; nous aurons d'après le principe de d'Alembert :

$$\text{(A)} \qquad -m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y-m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'+m'\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y'=0,$$

δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ représentant les accroissements quelconques des coordonnées x, y, x', y', compatibles avec les liaisons du système.

Appelons maintenant a et b les distances constantes Fm, mm', nous aurons comme équations de condition :

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$(x-x')^2+(y-y')^2=b^2,$$

et comme ces équations doivent être satisfaites pour tout déplacement vertical, on a aussi :

$$(1) \qquad x\delta x+y\delta y=0,$$

$$(2) \quad (x-x')\delta x+(y-y')\delta y+(x'-x)\delta x'+(y'-y)\delta y'=0;$$

celle-ci en vertu de l'équation (1) se réduit à

$$(3) \qquad -x'\delta x-y'\delta y+(x'-x)\delta x'+(y'-y)\delta y'=0.$$

Multiplions (1) et (3) par les facteurs indéterminées λ et μ, on aura en les ajoutant avec l'équation (A) :

$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda x-\mu x'\right)\delta x+\left[m\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\lambda y-\mu y'\right]\delta y+$$
$$+\left[-m'\frac{d^2x'}{dt^2}+\mu(x'-x)\right]\delta x'+\left[m'\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)+\mu(y-y')\right]\delta y'=0,$$

et comme cette équation doit être satisfaite, quelles que soient les variations δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$, il viendra :

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{array}{l} -m\dfrac{d^2x}{dt^2}+\lambda x-\mu x'=0, \\ m\left(g-\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)+\lambda y-\mu y'=0, \\ -m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}+\mu(x'-x)=0, \\ m'\left(g-\dfrac{d^2y'}{dt^2}\right)+\mu(y'-y)=0. \end{array}\right.$$

Si on élimine λ et μ entre ces quatre équations, il en restera deux qui, jointes aux deux équations de condition, donneront, après l'intégration, les coordonnées des points à une époque quelconque. En différentiant une fois ces valeurs, on aura les composantes de la vitesse angulaire. Il est bien entendu que les constantes arbitraires qu'introduit l'intégration, se determineront par les circonstances initiales du mouvement.

Considérons le cas où l'écart est très-petit.

Appelons θ et θ', les angles variables que forment avec la verticale les droites Fm et mm', nous aurons :

$$x = a \sin\theta = a\theta,$$
$$y = a\cos\theta = a,$$
$$x' = a\theta + b\theta',$$
$$y' = a + b,$$

en négligeant les puissances de θ et de θ' supérieures à la première.

Différentiant deux fois chaque équation, il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2} = b\frac{d^2\theta'}{dt^2} + a\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = 0.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (B), on a :

$$-ma\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda a\theta - \mu a\theta - \mu b\theta' = 0, \tag{4}$$
$$mg + \lambda a - \mu a - \mu b = 0, \tag{5}$$
$$-m'a\frac{d^2\theta}{dt^2} - m'b\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \mu b\theta' = 0, \tag{6}$$
$$m'g + \mu b = 0. \tag{7}$$

Nous voyons qu'il faut éliminer les valeurs de λ et de μ entre ces quatre équations. Or les équations (5) et (7) donnent pour ces quantités des valeurs constantes ; nous conserverons donc les lettres λ et μ dans (4) et (6) en les regardant comme des constantes connues. D'ailleurs ces équations (4) et (6) jointes aux équations de condition déterminent complétement le mouvement.

Comme l'intégration des équations (4) et (6) s'obtient par des méthodes connues, étant linéaires et à coefficients constants, nous ne la ferons pas ici.

Cherchons actuellement les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

Il faut pour cela que les équations (4) et (6) soient satisfaites, quel que soit le temps, par les valeurs de θ, θ', $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta'}{dt^2}$, tirées des équations de mouvement de deux pendules simples qui auraient pour longueur l'un a, l'autre $a+b$.

Or on a pour le pendule simple de longueur a l'équation

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\theta,$$

ou bien $-a\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\theta$, en remplaçant toujours $\sin\theta$ par l'angle θ.

Intégrant, on trouve :

$$a\frac{d\theta^2}{dt^2} = -g\theta^2 + c,$$

et si la vitesse angulaire est nulle pour $\theta = \alpha$,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{a}(\alpha^2 - \theta^2),$$

ou

$$(8) \qquad \sqrt{\frac{g}{a}}\, t = \arccos\frac{\theta}{\alpha},$$

après une deuxième intégration. On aurait pour le pendule de longueur $a+b$,

$$(9) \qquad \sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t = \text{arc}\cos\frac{\theta'}{\alpha}.$$

Les équations (8) et (9) résolues par rapport à θ et à θ', donnent :

$$\theta = \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t,$$

$$\theta' = \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t,$$

et en différentiant deux fois chacune de ces équations (*) .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha\frac{g}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t,$$

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\alpha\frac{g}{a+b}\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t.$$

Portant les valeurs de θ, θ', $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta'}{dt^2}$, dans les équations (4) et (6), il vient :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &ma\alpha\frac{g}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \lambda a\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t - \\ &-\mu a\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t - \nu b\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &m'a\alpha\frac{g}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + m'b\alpha\frac{g}{a+b}\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t + \\ &\qquad + \mu b\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t = 0;\end{aligned}\right.$$

réduisant et mettant en facteur commun $\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$, et $\cos\sqrt{\frac{g}{a+b}}\,t$, on a :

(*) On déduit ces résultats directement de l'équation $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{a}\theta$. Tm.

$$mg + \lambda a) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t = (\mu a + \mu b) \cos \sqrt{\frac{g}{a+b}}\, t,$$

$$m'g \cos \sqrt{\frac{g}{a}}\, t = -\left(\frac{m'bg}{a+b} + \mu b\right) \cos \sqrt{\frac{g}{a+b}}\, t.$$

Et si on prend les rapports de ces deux équations, on obtient enfin :

$$\frac{mg + \lambda a}{mg} = -\frac{(\mu a + \mu b)(a + b)}{m'bg + \mu b (a + b)}.$$

Telle est l'équation de condition pour que les points m et m' oscillent comme deux pendules simples.