NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BOUILLON

Note sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 120-121

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__120_1>

NOTE SUR L'ELIMINATION.

PAR M. BOUILLON,
professeur d'hydrographie de la marine à Morlaix.

Je prends les équations :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & m.A = q.B + n.r \\ (2) & m'.B = q'\,r + n'.r' \\ (3) & m''.r = q''.r' + n''.r'' \\ (4) & m'''.r' = q'''.r'' + n'''.\end{array}\right\}$$ dans l'algèbre de M. Bourdon, page 586, édition de 1837.

On démontre facilement que si la quantité m est première avec n', n'', n''', que m' soit première avec n'', n''' et que m'' soit première avec n''', on démontre, dis-je, très-facilement, que les valeurs de y données par l'équation $n.n'.n''.n''' = 0$, appartiennent au système $[A = 0\,,\ B = 0]$. La réciproque est également vraie, c'est-à-dire que les valeurs de y qui appartiennent au système $[A = 0,\ B = 0]$ sont comprises dans l'équation $n.n'.n''.n''' = 0$.

Supposons actuellement que m ne soit pas première avec n', n'', n''' que m' ne soit pas première avec n'', n''' et que m'' ne soit pas première avec n'''.

Soit α le p. g. c. d. de m et de n', on aura :

$$m = \alpha m_1 \quad \text{et} \quad n' = \alpha n_1'.$$

soit β le p. g. c. d. de m_1 et de n'', on aura .

$$m_1 = \beta m_2 \quad \text{et} \quad n'' = \beta n_1'',$$

soit γ le p. g. c. d. de m_2 et de n''', on aura :

$$m_2 = \gamma m_3 \quad \text{et} \quad n''' = \gamma n_1''',$$

soit β' le p. g. c. d. de m' et de n'', on aura ·

$$m' = \beta' m_1' \quad \text{et} \quad n_1'' = \beta' n_2'',$$

soit γ' le p. g. c. d. de m_1' et de n''', on aura :

$$m_1' = \gamma' m_2' \quad \text{et} \quad n''' = \gamma' n_2''',$$

soit γ'' le p. g. c. d. de m'' et de n_2''', on aura :

$$m'' = \gamma_1'' m_1'' \text{ et } n_2''' = \gamma'' n_3'''.$$

On déduit de là que

$$m = \alpha\beta\gamma . m_3, \quad m' = \beta'\gamma' . m_2' \quad \text{et} \quad m'' = \gamma'' m_1'',$$
$$n' = \alpha n_1', \quad n'' = \beta\beta' . n_2'' \quad \text{et} \quad n''' = \gamma\gamma'\gamma'' . n_3'''.$$

Ainsi les identités (1), (2), (3) et (4) deviennent

$$\alpha\beta\gamma . m_3 \text{A} = q . \text{B} + n . r,$$
$$\beta'\gamma' . m_2' . \text{B} = q' . r + \alpha n_1' r',$$
$$\gamma'' . m_1'' r = q'' . r' + \beta\beta' . n_2'' r'',$$
$$m''' r' = q''' r'' + \gamma\gamma'\gamma'' . n_3''',$$

telles que les donne M. Bourdon. Mais alors il n'y a plus d'élimination à effectuer pour achever la démonstration ; car

m_3 est première avec n_1', n_2'' et n_3''',

m_2' est première avec n_2'' et n_3''',

et m_1'' est première avec n_3''',

On retombe sur le premier cas, et toutes les bonnes valeurs de y seront données par $n = 0$, $n_1' = 0$, $n_2'' = 0$, et $n_3''' = 0$; ou par l'équation $nn_1'n_2''n_3''' = 0$, et réciproquement.

De cette manière, on évite beaucoup d'éliminations dont le nombre augmente avec le nombre des identités (1), (2), (3), etc.