GUILMIN

# Note sur la trigonométrie

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 4 (1845), p. 122-124
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__122_0>

# NOTE SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

**PAR M. GUILMIN,**
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

(Fin, voir page 55.)

—

On sait que l'équation aux cosinus, dont il vient d'être question, s'obtient en cherchant préalablement $\cos na$ en fonction de $\cos a$, puis changeant $a$ en $\frac{a}{n}$.

Sachant que $\cos na$ est une fonction entière de $\cos a$, on propose de démontrer à priori que cette fonction ne renferme que des puissances paires de $\cos a$, si $n$ est pair, et seulement des puissances impaires de $\cos a$, si $n$ est impair.

1[er] cas, $n$ pair.

Quand on change $a$ en $a+\pi$, $\cos na$ qui devient $\cos(na+n\pi)$ ne changeant pas plus de signe que de valeur absolue, il doit en être de même de chaque terme de la fonction qui le représente ; or chaque facteur $\cos a$ devenu $\cos(a+\pi)$ change de signe ; le nombre de ces facteurs dans chaque terme doit donc être pair. Ce qu'il fallait prouver.

2[e] cas, $n$ impair.

Dans ce cas, $\cos na$ change seulement de signe en devenant $\cos(na+n\pi)$ ; il doit en être de même de chaque terme de la fonction ; donc le nombre des facteurs $\cos a$ doit être impair dans ce terme.

Il résulte de là que dans l'équation de degré $n$ qui donne $\cos\frac{a}{n}$ en fonction de $\cos a$, tous les termes sont de degré pair ou de degré impair, suivant que $n$ est pair ou impair. Ceci comprend comme cas particulier le principe dont l'énoncé commence cet article.

Quand on cherche $\cos na$ en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$, on trouve une fonction entière dont chaque terme contient toujours une puissance paire de $\sin a$ avec une puissance paire de $\cos a$, si $n$ est pair, et une puissance impaire de $\cos a$, si $n$ est impair. Expliquer cela à priori.

Quel que soit $n$, si on change $a$ en $-a$, $\cos na$ et $\cos a$ ne changent pas, tandis que $\sin a$ change de signe. Donc, pour que la fonction qui représente $\cos na$ ne change pas, il est nécessaire que chaque terme contienne une puissance paire de $\sin a$.

Supposons maintenant qu'on change $a$ en $a+\pi$; distinguons les cas de $n$ pair et de $n$ impair. Dans le premier cas, $\cos(na+n\pi)$ ne changeant pas de signe, chaque terme de la fonction doit conserver le sien; $\sin a$ et $\cos a$ changent de signes en devenant $\sin(a+\pi)$, $\cos(a+\pi)$; $\sin a$ ayant un exposant pair dans notre terme, sa puissance conserve le même signe qu'auparavant. Donc la puissance de $\cos a$ doit être paire.

Si $n$ est impair, $\cos a$ changeant de signe, chaque terme de la fonction doit en changer; comme la puissance de $\sin a$ est toujours paire, celle de $\cos a$ dans ce terme doit être impaire.

On prouvera de la même manière que si on peut trouver pour $\sin na$ une fonction entière de $\sin a$ et $\cos a$, chaque terme de cette fonction devra comprendre dans tous les cas une puissance impaire de $\sin a$ avec une puissance paire du cosinus, si $n$ est impair; et une puissance impaire du même, si $n$ est pair. On se fonde d'abord sur ce que $\sin na$ et $\sin a$ changent de signe avec $a$, tandis que $\cos a$ n'en change pas, ce qui prouve que chaque terme de la fonction qui représente $\sin na$ doit renfermer, quel que soit $n$, une puissance impaire de sin $a$. Puis on observe que si on change $a$ en $a + \pi$, sin $a$ et cos $a$ changent de signes, tandis que sin $na$ en change seulement quand $n$ est impair.

De cette dernière remarque il résulte que la substitution de $1 - \sin^2 a$, au lieu de $\cos^2 a$, donnera de suite, quand $n$ sera impair pour sin $na$, une fonction rationnelle de sin $a$ dont le degré ne sera pas plus élevé que le degré de la première fonction par rapport à sin $a$ et cos $a$.

Dans le cas de $n$ pair, on pourra mettre préalablement cos $a$ en facteur d'une fonction qui sera paire par rapport à cos $a$. Après l'élimination des cosinus, il faudra élever au carré ; ce qui donne une fonction d'un degré double en sin $a$.