NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DUTERME

Note sur le calcul des approximations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 124-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__124_1>

NOTE

Sur le calcul des approximations.

PAR M. DUTERME,
élève du collége Rollin (classe de M. O. BONNET).

PROBLÈME. *Étant donnés deux nombres* a *et* b *entre lesquels on veut insérer* m *moyens géométriques, on demande avec quelle approximation, il faut prendre la raison* $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, *pour que tous ces moyens soient obtenus à moins de* δ.

Solution. Appelons q la valeur cherchée de la raison, que nous supposerons approchée à moins de ε, et soit $q+\alpha$ la valeur exacte de cette raison, de telle sorte que

$$(q+\alpha)^{m+1}=\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha<\varepsilon.$$

Les valeurs approchées des moyens seront

$$aq,\quad aq^2,\quad aq^3,\ldots\ aq^n,\ldots\ aq^m,$$

et les valeurs exactes

$$a(q+\alpha),\ a(q+\alpha)^2,\ a(q+\alpha)^3,\ldots\ a(q+\alpha)^n,\ldots\ a(q+\alpha)^m,$$

de manière que les erreurs commises auront pour valeurs respectives

$$a\alpha,\ a[(q+\alpha)^2-q^2],\ldots\ a[(q+\alpha)^2-q^2],\ldots\ a[(q+\alpha)^m-q^m].$$

Évaluons ces différences.

Posons en général :

$$(q+\alpha)^n-q^n=\mathrm{A}\ ;$$

en multipliant par q et ajoutant ensuite $\alpha(q+\alpha)^n$ aux deux membres, il viendra :

$$(q+\alpha)^{n+1}-q^{n+1}=\mathrm{A}q+\alpha(q+\alpha)^n.$$

Ce qui nous montre que connaissant la différence de deux mêmes puissances de $q+\alpha$ et de q, pour avoir la différence entre les deux puissances suivantes, il suffit de multiplier la première différence par q, et d'ajouter ensuite le produit de α par la puissance de $q+\alpha$, qui entrait dans la première différence.

De cette remarque nous déduisons successivement :

$$q+\alpha-q=\alpha,$$
$$(q+\alpha)^2-q^2=\alpha q+\alpha(q+\alpha),$$
$$(q+\alpha)^3-q^3=\alpha q^2+\alpha q(q+\alpha)+\alpha(q+\alpha)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(q+\alpha)^n-q^n=\alpha q^{n-1}+\alpha q^{n-2}(q+\alpha)+\ldots+\alpha(q+\alpha)^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(q+\alpha)^m-q^m=\alpha q^{m-1}+\alpha q^{m-2}(q+\alpha)+\ldots+\alpha(q+\alpha)^{m-1}.$$

Ainsi la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée du moyen de rang n est

$$a\alpha[q^{n-1}+q^{n-2}(q+\alpha)+\ldots+(q+\alpha)^{n-1}]$$

Comme l'on peut toujours supposer q et $q+\alpha$ plus grands que 1 ou $b > a$ (*), on voit que cette différence va en augmentant avec n ; elle est donc la plus grande possible pour $n = m$; il suffit donc pour résoudre la question, de poser :

$$a\alpha\,[q^{m-1} + q^{m-2}(q+\alpha) + \ldots + (q+\alpha)^{m-1}] < \delta,$$

ou

$$ma\alpha\,(q+\alpha)^{m-1} < \delta \quad \text{ou} \quad ma\alpha\,(q+\alpha)^{m+1} = mb\alpha < mb\varepsilon < \delta,$$

d'où

$$\varepsilon < \frac{\delta}{mb}. \qquad \text{C.Q.F.T.}$$