Nouvelles annales de mathématiques

E. Brassine

Théorèmes. Sur le triangle, le tétraèdre, l’ellipse et l’ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 139-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__139_0>

THÉORÈMES.

Sur le triangle, le tétraèdre, l'ellipse et l'ellipsoïde.

PAR M. E. BRASSINE,
professeur aux écoles d'artillerie.

—

1° Si on désigne par p, le demi-périmètre d'un triangle, et par r le rayon du cercle inscrit dans ce triangle, son aire pourra s'exprimer par l'une des formules suivantes :

$$S=p^2.\tang\frac{1}{2}A.\tang\frac{1}{2}B.\tang\frac{1}{2}C\ldots S=r^2.\cot\frac{1}{2}A.\cot\frac{1}{2}B.\cot\frac{1}{2}C\ (*).$$

2° Considérons une ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, rapportée à son centre et à ses axes. Pour mener une tangente à cette ellipse, par un point extérieur m', dont les coordonnées sont x', y', on déterminera un point M′ dont les coordonnées seront x', $\frac{a}{b}y'$, et pour ce point M′ on mènera des tangentes à la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse. Abaissant des points de contact de ces tangentes des perpendiculaires, sur le grand axe, on obtiendra, par leur rencontre avec l'ellipse, les points de contact des tangentes à cette courbe passant par le point m'.

Pour mener, par une droite donnée, des plans tangents à l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on prendra, sur cette droite, un point m' dont les coordonnées seront x', y', z'; on déterminera ensuite un point M′ dont les coor-

(*) Voir I, 79, 196. Tm.

données seront x', y', $\frac{a}{c}z'$; joignant ce point M' avec la trace de la droite donnée sur le plan x, y, on aura une seconde droite, par laquelle on mènera deux plans tangents à la sphère $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. Du point de contact de ces plans tangents, abaissant deux perpendiculaires sur le plan des x, y, on obtiendra, par leur rencontre avec la surface de l'ellipsoïde, les deux points de contact des plans tangents passant par la droite donnée.

On emploiera la solution précédente relative à l'ellipsoïde de révolution, pour mener par une droite donnée un plan tangent à un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Si on exécute l'épure du plan tangent à l'ellipsoïde, par la méthode que nous venons d'indiquer, et si on compare cette solution à celle qu'a donnée Monge (au moyen de l'hyperboloïde de révolution), on en déduira un procédé géométrique simple, pour mener une tangente commune à une ellipse et à une hyperbole, qui ont un premier axe principal commun, et le second parallèle.

3° Si on joint les deux foyers F, F' d'une ellipse aux deux points conjugués m', m'', on aura deux triangles $FF'm'$, $FF'm''$, et il est aisé de trouver que : *la somme des carrés de leurs aires est constante.*

Si on en évalue les tangentes des demi-angles $Fm'F'$, $Fm''F'$, on aura en désignant ces angles par α, α' ;

$$\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tang}^2\frac{\alpha'}{2}=\text{constante}.$$

Si on désigne par X_1, X_2 les abscisses des points où les tangentes conjuguées, coupent le grand axe de l'ellipse, on aura la relation : $\frac{1}{X_1^2}+\frac{1}{X_2^2}=\text{constante}.$

4° Désignons par a, b, c, les trois côtés d'un triangle, par R le rayon du cercle circonscrit : le carré de la distance du centre de gravité du triangle au centre du cercle circonscrit s'exprimera par la formule

$$D^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

En désignant par r le rayon du cercle inscrit, et par Δ la distance du centre de gravité du triangle au centre de ce cercle, on trouve la formule

$$\Delta^2 = r^2 + \frac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{3} - \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\right).$$

Pour le tétraèdre, la distance du centre de la sphère circonscrite au centre de gravité du solide est donnée par la formule

$$D^2 = R^2 - \frac{\Sigma . a^2}{16}$$

($\Sigma . a^2$ désignant la somme des carrés des arêtes).

Si, dans un tétraèdre, on désigne par l, l', l'', l''' les lignes qui vont des sommets au centre de gravité des faces opposées, on aura la relation

$$\Sigma a^2 = \frac{9}{4}(l^2 + l'^2 + l''^2 + l'''^2).$$

5° Appelons G le centre de gravité d'un contour polygonal composé de m côtés égaux ; par ce point menons une droite quelconque, et prenons sur cette droite deux points M, M', que nous joindrons aux sommets du polygone, on aura la relation

$$\Sigma . D'^2 - \Sigma\, D^2 = m\left(\overline{M'G}^2 - \overline{MG}^2\right)$$

(ΣD^2, $\Sigma . D'^2$, désignant la somme des carrés, des distances des points M, M' aux sommets du polygone).