MIDY

Analyse indéterminée du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 146-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__146_1>

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

La résolution en nombres entiers et positifs de l'équation indéterminée

$$ax \pm by = \pm c,$$

par les nombreuses applications qu'on en peut faire et les artifices de calcul dont elle est susceptible, est un des plus utiles exercices par lesquels les jeunes mathématiciens peuvent préluder à des recherches plus importantes. Aussi diverses méthodes de résolution sont-elles développées avec soin et une certaine étendue, dans les ouvrages estimés d'algèbre qui sont actuellement entre les mains des élèves. La suivante, fondée sur la théorie des restes (*), donnera toujours, nous le croyons du moins, une solution plus facile et plus prompte. Elle aura d'ailleurs l'avantage de familiariser les élèves avec des principes dont l'application encore peu répandue, peut être fort utile, et dont l'emploi judicieux est très-propre à exercer leur sagacité.

Rappelons ici en peu de mots les principes dont je parle.

On sait que si a et b sont premiers entre eux, et que l'on divise par a les produits successifs

$$1b,\quad 2b,\quad 3b,\ldots\ (a-1)\,b,$$

tous les restes seront différents. D'où il suit que si l'on conçoit cette suite prolongée indéfiniment de manière à former cette autre

$$1b,\ 2b,\ 3b,\ldots\ (a-1)\,b,\ ab,\ (a+1)\,b,\ \text{etc.},$$

les a premiers restes correspondants, se reproduiront périodiquement.

C'est ainsi par exemple que pour $a=11$ et $b=37$, on aura les deux suites :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & \text{etc.}, \\ 4, & 8, & 1, & 5, & 9, & 2, & 6, & 10, & 3, & 7, & 0, & 4, & \text{etc.} \end{array}$$

La première est celle des multiplicateurs successifs de 37, je les nommerai *indices*. La seconde est celle des restes correspondants, et se forme aisément par l'addition répétée du premier reste 4, en ayant soin de retrancher de chaque

(*) Cette méthode est précisément celle des congruences de M. Gauss. C'est pour la propager que nous avons inséré cet article (III, 343). Tm.

somme nouvelle le diviseur 11, à mesure qu'il s'y trouve contenu.

Or chacun des produits que nous venons de considérer se trouve compris entre deux multiples consécutifs de 11, et suivant qu'on le retranchera du multiple supérieur ou du multiple inférieur, le reste sera positif ou négatif. De plus la somme des valeurs absolues de ces deux restes, sera constante et égale à 11, ou chacun des deux sera par rapport à 11, le complément de l'autre.

Il résulte de là que nos deux suites, en ne prenant que la partie nécessaire de la seconde, sont encore représentées par celles-ci :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ -7, & -3, & -10, & -6, & -2, & -9, & -5, & -1, & -8, & -4. \end{array}$$

Remarquons que cette seconde suite de restes négatifs, n'est autre numériquement que la suite positive renversée.

En généralisant ces résultats, il sera facile de voir que dans l'une comme dans l'autre, la somme de deux termes pris à égales distances des deux termes extrêmes, sera toujours constante et égale à a, et que la somme de ces mêmes termes, pris le premier dans une des deux suites, et le second dans l'autre, sera nulle.

De plus, à cause de la periodicité des restes, un terme quelconque de la suite indéfinie des indices pourra être augmenté ou diminué d'un multiple quelconque de a sans que le reste change.

C'est en nous appuyant sur ces principes, que nous allons résoudre l'équation proposée

$$ax \pm by = \pm c,$$

dont les coefficients a et b doivent être, comme on sait, premiers entre eux.

Soit pour premier exemple l'équation numérique

$$11x + 17y = 339.$$

Le reste de la division de 17 par 11 étant 6, nous aurons les deux suites :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$
$$6,\ 1,\ 7,\ 2,\ 8,\ 3,\ 9,\ 4,\ 10,\ 5.$$

Le terme tout connu de l'équation, 339, divisé par 11, donne le quotient 30 et le reste 9. L'indice 7 correspondant à 9, nous fait connaître d'abord que 7 fois 17 est le premier multiple de 17 qui, divisé par 11, donne aussi le reste 9. Donc 7 est la plus petite valeur possible de y. Faisons donc

$$y = 7.$$

La valeur correspondante de x sera

$$x = 30 - \frac{7 \times 17 - 9}{11} = 30 - 10 = 20.$$

Les formules cherchées sont donc :

$$x = 20 - 17t,$$
$$y = 7 + 11t.$$

Soit en second lieu l'équation

$$11x - 17y = 3$$

La division de 3 par 11 donne le reste 3, dont le complément à 11 est 8. D'où je conclus que l'indice 5 correspondant à 8, est la valeur la plus simple possible de y.

Par suite

$$x = \frac{5 \times 17 + 3}{11} = 8.$$

Les formules cherchées sont donc :

$$x = 8 + 17t,$$
$$y = 5 + 11t.$$

Soit encore

$$11x - 17y = -3.$$

L'indice 6 correspondant au reste 3, est la valeur de y, et l'on trouve immédiatement que 9 est la valeur correspondante de x.

Les formules sont donc :

$$x = 9 + 17t,$$
$$y = 6 + 11t.$$

Mais si le diviseur a était un nombre un peu grand et que le reste cherché fût un des derniers de la période, on ne saurait disconvenir que le calcul précédent ne devienne long et fastidieux, et la méthode perdrait alors cette apparente simplicité que nous venons de remarquer. Heureusement les principes développés plus haut vont nous donner un moyen aussi facile que prompt de lever cette difficulté.

Soient, par exemple,

$$a = 48 \quad \text{et} \quad b = 59.$$

Le premier reste est alors 11 ; son complémentaire est — 37. Proposons-nous d'abord de trouver l'indice correspondant au reste 1. Pour cela, opérons comme s'il fallait trouver le plus grand commun diviseur des nombres — 37 et 11. Prenons les quotients absolus inférieurs et les restes avec leurs signes ; nous formerons ainsi le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 3 & 2 & 1 & \\ \hline -37 & 11 & -4 & 3 & -1 \end{array}.$$

J'en conclurai ces deux suites d'indices et de restes :

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 9, & 13, & 35. \\ 11, & -4, & 3, & -1, & +1. \end{array}$$

Voici comme on peut les déduire du tableau précédent L'indice 4 est égal au premier quotient 3 augmenté de 1, et le reste correspondant est le premier reste trouvé — 4. L'indice suivant 9 est égal au précédent 4 multiplié par le second quotient 2 et augmenté du premier indice 1, et le reste correspondant est le second reste + 3 du tableau. L'indice suivant 13 est égal au précédent 9 multiplié par le troisième quotient 1 et augmenté de l'indice antérieur 4, et le reste correspondant est le dernier reste — 1 du tableau; et, comme les restes — 1 et + 1 donnent une somme nulle, les indices correspondants 13 et 35 sont complémentaires par rapport au diviseur 48. Il est donc aisé de déduire le second du premier.

Maintenant, de l'indice 35 correspondant au reste 1, il est aisé de déduire l'indice correspondant à tel reste qu'on voudra, au reste 7 par exemple. Pour cela, multiplions 35 par 7 et retranchons du produit 245, 5 fois 48, ou le plus grand multiple possible de 48, le reste 5 sera le plus petit indice correspondant au reste indiqué 7; ce qui, dans tout l'exemple actuel, est facile à vérifier.

On peut remarquer que la loi de formation de ces indices est la même que celle que l'on suit pour former les termes des réduites sommaires des fractions continues.

Soient, pour second exemple, $a = 70$ et $b = 261$. Le tableau à former sera celui-ci :

	2	1	2	
51	— 19	13	— 6	1

et les deux suites seront :

1,	3,	4,	11.
— 19,	13,	— 6,	1.

Si l'on demandait l'indice correspondant au reste 57, du produit de ce nombre par l'indice 11 correspondant au reste 1, on retrancherait 8 fois 70, ou le plus grand multiple de

70 qui s'y trouve contenu, et le reste 67 serait le plus faible indice correspondant à 57. D'ailleurs, 13 étant le complément du reste 57, l'indice correspondant 3 du tableau sera le complément de l'indice cherché, qui par là se trouve être encore le nombre 67, ainsi qu'on l'a trouvé par le calcul précédent.

Appliquons cette méthode à la résolution de l'équation

$$236x + 615y = 340948.$$

Le terme tout connu 340948 divisé par 236 donne le quotient 1443 et le reste 2. Il s'agit donc de trouver l'indice correspondant à ce reste 2.

Ici le premier reste est 143, et son complément est -93. Ces deux nombres donnent lieu au tableau suivant :

	1	1	1	6	
143	-93	50	-43	7	-1

Les deux suites seront :

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 5, & 33, & 203. \\ -93, & 50, & -43, & 7, & -1, & +1. \end{array}$$

On voit par là que le reste 2 correspondra à l'indice 406, ou, retranchant 236 de ce nombre, 2 correspondra à 170.

Donc $y = 170.$

Par suite,

$$x = 1443 - \frac{170 \times 615 - 2}{236} = 1443 - 443 = 1000;$$

d'où

$$x = 1000 - 615t,$$
$$y = 170 + 236t.$$

Quand le nombre des solutions sera limité, on voit qu'il sera indiqué immédiatement par la valeur de l'une des inconnues.