Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 14-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__14_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(*Voy.* tom. III , p. 510)

LVIII. *Diamètre de Newton* ou droite des moyennes distances directes.

Notation. Si dans P_m fonction homogène en x et y, de degré n, on fait $x=1, y=a$, on obtient une fonction de a que nous désignerons par a_m, a'_m est la dérivée première de a_m prise par rapport à a, a''_m la dérivée seconde de a_m prise par rapport à a, et ainsi de suite.

Problème. Que devient la fonction P_m en y remplaçant y par $ax + b$.

Solution. La fonction devient

$$a_m x^n + a'_m b x^{n-1} + a''_m \frac{b^2}{1.2} x^{n-2} + \ldots + Ab^n,$$

A est le coefficient de y^n dans P_m.

Problème II. Que devient la fonction $F(x, y) = P_m + P_{m-1} + P_{m-2} \ldots + P_0$, en y remplaçant y par $ax + b$?

Solution. La fonction devient :

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
a_m x^m + a'_m b & x^{m-1} + a''_m \frac{b^2}{1.2} & x^{m-2} + a'''_m \frac{b^3}{1.2\,3} & x^{m-3} + \ldots Ab^m \\
\quad + a_{m-1} & + a'_{m-1} b & + a''_{m-1} \frac{b^2}{1.2} & A'b^{m-1} \\
 & + a_{m-2} & + a'_{m-2} b & A''b^{m-2} \\
 & & + a'_{m-3} &
\end{array}\right\} \quad (34)$$

A est le coefficient de y^m, A' le coefficient de y^{m-1}, etc.

Ces deux solutions sont des conséquences immédiates du binôme de Newton.

LIX. Théorème de Newton sur les diamètres.

Une ligne de l'ordre m étant coupée par des systèmes de sécantes parallèles, si sur chacune de ces sécantes on détermine le point des moyennes distances directes des points d'intersection, tous ces points sont sur une même droite.

Démonstration. Soit $P_m + P_{m-1} + \ldots + P_0 = 0$, l'équation donnée de la ligne; $y = ax + b$, l'équation d'une sécante, a est une constante et b une quantité variable ; soient X et Y les coordonnées du point de moyenne distance des points d'intersection de la sécante avec la courbe, X sera aussi l'abscisse du point de moyenne distance des projections des points d'intersections sur l'axe des x (t. II, p. 301), remplaçant dans l'équation y par $ax+b$, on obtient (prob. 2, LVIII),

$$X = \frac{a'_m b + a_{m-1}}{m a_m}, \quad Y = aX + b = \frac{m b a_m - a'_m a b - a.a_{m-1}}{m a_m};$$

éliminant b entre ces deux équations, et remplaçant X et Y par x et y, on obtient :

$$x(aa'_m - m a_m) - a'_m y = a_{m-1}. \qquad (35)$$

équation de la droite des moyennes distances.

Applications; Lignes du second ordre.

$$P_2 = Ay^2 + Bxy + Cx^2; \quad P_1 = Dy + Ex, \quad P_{(0)} = F,$$
$$a_2 = Aa^2 + Ba + C; \; a_1 = Da + E; \; a'_2 = 2Aa + B; \; a'_1 = D;$$

l'équation (34) devient :

$$x^2(Aa^2+Ba+C) + x[2Aab+Bb+Da+E] + Ab^2 + Db + F = 0;$$

l'équation (35) devient :

$$a(2Ay + Bx + D) + 2Cx + By + E = 0.$$

Lignes du troisième ordre.

$$P_3 = Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3; \; P_2 = Ey^2 + Fxy + Gx^2,$$
$$P_1 = Hy + Ix; \quad P_0 = K,$$
$$a_3 = Aa^3+Ba^2+Ca+D; \; a_2 = Ea^2+Fa+G; \; a_1 = Ha+I,$$
$$a'_3 = 3Aa^2 + 2Ba + C; \quad a'_2 = 2Ea + F, \; a'_1 = H,$$
$$a''_3 = 6Aa + 2B; \qquad a''_2 = 2E,$$
$$a''_3 = 6A;$$

l'équation (34) devient :

$$\begin{array}{r|r l}
(Aa^3+Ba^2+Ca+D)x^3 + (3Aa^2+Ba+C)b & x^2 + (3Aa+B)b^2 & x + Aq^3 \\
Ea^2+Fa+G & (2Ea+F)b & +Eb^2 \\
 & Ha+I & +Hb \\
 & & +K,
\end{array}$$

l'équation (35) devient :

$$a^2(3Ay+Bx+E) + a(2By+2G+F) + Cy + 3Dx + G = 0.$$

Corollaire. Un triangle étant une ligne du troisième degré, il est facile d'en trouver les diamètres.

Observation. Dans les coniques, la droite des moyennes distances n'est autre que la bissectrice des cordes parallèles, et c'est la définition qu'Apollonius donne du diamètre. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστιν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἡγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους διχα διαιρεῖ, « j'appelle diamètre de toute ligne courbe, située dans un même plan, une droite qui, menée d'un point de la courbe à une autre, divise en deux parties égales, toutes les droites parallèles à une certaine droite » (liv. 1, définit. 10). On voit bien que les diamètres d'Apollonius ne peuvent exister que dans les courbes planes dont l'équation peut se ramener à ne renfermer que des puissances paires d'une des coordonnées ou de toutes deux. Apollonius pose une seconde définition (définit. 13), pour les diamètres qui vont d'une courbe à une autre comme dans l'hyperbole ; et une troisième définition (déf. 15), pour des diamètres qui ne rencontrent pas la courbe, dont l'hyperbole offre aussi un exemple. Newton a donné la véritable notion du diamètre, en appliquant ce nom aux droites de moyenne distance; il ne s'en sert que pour les lignes du troisième ordre; il est évident que la dénomination est générale. Ainsi à chaque sécante répond un diamètre, qu'on peut désigner sous le nom de *diamètre conjugué à la sécante* et *vice versâ.*

Corollaire I. Si deux lignes de l'ordre m, rapportées aux mêmes axes coordonnés, ont en commun les fonctions P_m et P_{m-1}, elles ont le même système de diamètre. Il suffit donc d'étudier les diamètres dans la courbe donnée par l'équation $P_m + P_{m-1} = 0$.

Corollaire II. Si P_{m-1} manque dans l'équation, a_{m-1} est nul, et dans ce cas tous les diamètres passent par un même point, qui est l'origine. L'enveloppe des diamètres est alors un point auquel Newton a donné le nom de *centre général*, et il appelle simplement *centre* la rencontre de deux diamètres quelconques.

Corollaire III. S'il existe un centre général, en y transportant l'origine, la fonction P_{m-1} disparaît de l'équation. Ainsi, pour découvrir si une courbe donnée par une équation a un centre général, on changera l'origine en conservant la direction des axes, ce qui introduit deux indéterminées. Si, par des valeurs réelles et finies, données à ces indéterminées, on peut faire disparaître les m coefficients de la fonction P_{m-1}, la nouvelle origine est le centre général ; mais si l'une de ces valeurs, ou toutes les deux sont infinies, le centre général est à l'infini, et on ne peut faire disparaître la fonction P_{m-1}.

Applications. Courbes du second degré. Même équation que ci-dessus ; soient p et q les coordonnées de la nouvelle origine, il vient :

$$P_1 = y\,(2Aq + Bp + D) + x\,(2Cp + Bq + E)\ ;$$

égalant à zéro les coefficients de y et de x, on en tire les valeurs connues des coordonnées du centre général, mais qui deviennent infinies lorsque $B^2 - 4AC = 0$.

2° *Courbes du troisième degré.* Équation comme ci-dessus ; p et q coordonnés de la nouvelle origine, il vient :

$$P_2 = y^2\,(3Aq+Bp+E) + xy\,(2Bq+2Cp+F) + x^2\,(3Dp+Cq+G)\ ;$$

égalant à zéro les deux coefficients de y^2 et de x^2, il vient :

$$p = \frac{CE - 3AG}{9AD - BC},$$

$$q = \frac{BG - 3DE}{9AD - BC}.$$

Ainsi pour que xy disparaisse, il faut qu'on ait l'équation de condition

$$2G(B^2-3AC)+2E(C^2-3BD)+F(9AD-BC)=0.$$

(Voir Euler, introd., t. II, p. 345).

Si l'on avait d'abord fait disparaître les coefficients de y^2 et de xy, on aurait trouvé :

$$p=\frac{3AF-2BE}{2(B^2-3AC)},\qquad q=\frac{2CE-BF}{2(B^2-3AC)}.$$

Mais, en vertu de l'équation de condition, les deux valeurs de p sont égales ; il en est de même des valeurs de q ; de sorte que l'équation de condition peut se mettre sous ces six formes :

$$\begin{aligned}
2(B^2-3AC)\ (CE-3AG) &= (9AD-BC)(3AF-2BE),\\
2(B^2-3AC)\ (BG-3DE) &= (9AD-BC)(2CE-BF),\\
2(C^2-3BD)\ (CE-3AG) &= (9AD-BC)(2BG-CF),\\
2(C^2-3BD)\ (BG-3DE) &= (9AD-BC)(3DF-2CG),\\
(B^2-3AC)(2BG-CF) &= (C^2-3BD)(3AF-2BE),\\
(B^2-3AC)(3DF-2CG) &= (C^2-3BD)(2CE-BF).
\end{aligned}$$

Si $B^2-3AC=0$, il faut qu'on ait ou $9AD-BC=0$, ou $3AG-2BE=0$; dans le premier cas, le centre général est à l'infini ; dans le second cas, on a $p=\frac{0}{0}$; il existe alors une infinité de centres généraux, tous distribués sur des droites : ainsi que nous le dirons plus loin, ce qui est intuitif lorsque la courbe se réduit à trois droites parallèles.

Corollaire. Le coefficient angulaire du diamètre est $\frac{aa'-ma_m}{a'_m}$; celui de la sécante est a, on connaît donc la tangente de l'angle de ces deux droites : lorsque cet angle est droit, le diamètre prend le nom d'*axe* ; la tangente de l'angle que fait un axe avec la sécante conjuguée étant infinie, si les coordonnées sont aussi à angle droit, on a pour équation $a^m(a^2+1)-maa_m=0$. Équation du degré m : ainsi toute ligne du degré m a au plus m axes.

Application aux lignes du troisième degré. On trouve toute réduction faite :

$$\mathrm{B}a^3 + [2\mathrm{C} - 3\mathrm{A}]a^2 + [3\mathrm{D} - 2\mathrm{B}]a - \mathrm{C} = 0.$$

LXI. *Problème.* Quelles sont les courbes algébriques dont tous les diamètres sont parallèles?

Solution. Le coefficient angulaire doit donc être égal à une quantité constante que nous representons par k; d'où l'on tire $\frac{a'_m}{a_m} = \frac{m}{a-k}$; remontant aux fonctions primitives, il vient $\log a_m = m \log(a-k) + \log f$, où f représente la constante arbitraire, aussi $a_m = f(a-k)^m$ et $\mathrm{P}_m = f(y-kx)^m$; en vérifiant, on trouve qu'en effet le coefficient angulaire des diamètres est constamment egal à k; faisant $m = 2$, on a la parabole ordinaire; et, quelle que soit la valeur de m, nous verrons que toutes ces courbes sont du genre dit paraboliques.

Corollaire. Si l'on a $\mathrm{P}_m = f(y-kx)^m$, et $\mathrm{P}_{m-1} = 0$, la courbe n'a qu'un seul diamètre, savoir $y = kx$.

LXII. *Problème.* Une ligne de l'ordre m étant donnée par une équation, et connaissant le coefficient angulaire d'un diamètre, construire ce diamètre et une sécante conjuguée.

Solution. Regardant a comme l'inconnue dans l'expression du coefficient angulaire du diamètre, on a une équation du degré $m-1$, et a est le coefficient angulaire de la sécante conjuguée; on exclut le cas où tous les diamètres sont parallèles.

Corollaire. Ainsi une ligne de l'ordre m, ne peut avoir que $m-1$ diamètres de même direction.

LXIII. *Problème.* Etant données une ligne par son équation et une droite $y = rx + s$, dans le plan de la ligne; quelle relation doit exister entre r et s, pour que cette droite soit un diamètre?

Solution. On a $r = \frac{aa_1^m - ma_m}{a'_m}$, $s = -\frac{a_{m-1}}{a'_m}$; éliminant a entre ces deux équations, on obtient la relation cherchée qui ne peut dépasser le degré $(m-1)^2$.

Application. $m=2$; on trouve pour relation :

$$s(B^2 - 4AC) + r(2AE - BD) = 2CD - BE.$$

LXIV. Théorie des *diamètres conjugués*.

Soit $\quad Aa_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots A_m,$

$$a_{m-1} = B_0 a^{m-1} + B_1 a^{m-2} + B_2 a^{m-3} + \ldots B_{m-1}.$$

Soit a' le coefficient angulaire du diamètre conjugué au diamètre $y = ax' + b'$, on aura d'après ce qui précède :

$$\left.\begin{array}{l} a'\left[mA_0 a^{m-1} + (m-1)A_1 a^{m-2} + \ldots A_{m-1}\right] + \\ \quad + A_1 a^{m-2} + 2A_2 a^{m-3} + \ldots mA_m = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Si le diamètre $y = ax + b$ doit aussi être conjugué au diamètre $y' = ax' + b'$, l'on doit avoir :

$$\left.\begin{array}{l} a\left[mA_0 a'^{m-1} + (m-1)A_1 a'^{m-2} + \ldots A_{m-1}\right] + \\ \quad + A_1 a'^{m-2} + A_2 a'^{m-2} + \ldots mA_m = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

soustrayant (2) de (1), et divisant par $a - a'$, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} mA_0 a'a\left[a^{m-3} + a'^{m-3} + aa'(a^{m-5} + a'^{m-5}) + a^2a'^2(a^{m-7} + a'^{m-7}) + \ldots\right] \\ +(m-1)A_1 aa'\left[a^{m-4} + a'^{m-4} + aa'(a^{m-6} + a'^{m-6}) + a^2a'^2(a^{m-8} + a'^{m-8}) + \ldots\right] \\ \quad \vdots \\ + (m-1)\,A_{m-1} = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Faisons $aa' = u$, $a + a' = v$; a et a' seront racines de l'équation $t^2 - ut + v = 0$, et d'après la théorie des fonctions symétriques, on sait que $a^k + a'^k$ sont des fonctions de degré k, de u et de v; donc l'équation (3) est au plus du degré $m-2$, des mêmes variables u et v; multipliant l'équation (1) par a'^{m-2} et l'équation (2) par a^{m-2} et ajoutant, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} (m-1)A_1 a'^{m-2} a^{m-2}(a' - a) + (m-2)A_2 a'^{m-3} a^{m-3}(a'^2 - a^2) + \\ \quad + (m-3)\,A_3 a'^{m-4} a^{m-4}(a'^3 - a^3) + \text{etc.} = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Divisant par $a' - a$, on démontre comme pour l'équation (3) qu'elle s'élève au plus au degré $m-2$, en fonction de u et v; ces deux variables dépendent donc de deux équations chacune de degré $m - 2$ au plus ; on a donc ce théorème.

***Théorème.* Une courbe algébrique de degré m ne saurait avoir plus de $(m-2)^2$ systèmes de diamètres conjugués, m étant plus grand que deux.**

1. *Application.* $m = 2$; l'équation (1) devient :

$$2A_0aa' + A_1(a + a') + 2A = 0.$$

Equation symétrique en a et a'; elle se confond alors avec l'équation (2); a reste indéterminé et il existe une infinité de systèmes de diamètres conjugués.

2. $m = 3$,

$$3Aa^2a' + 2Baa' + Ca' + Ba^2 + 2Ca + 3D = 0, \quad (1)$$

même notation que ci-dessus,

$$3Aa'^2a + 2Baa' + Ca + Ba'^2 + 2Ca' + 3D = 0, \quad (2)$$

$$3Aaa' + B(a + a') + C = 0. \quad (3)$$

Prenant la valeur de a' dans (3), et substituant dans (1), il vient, toute réduction faite :

$$a^2[3AC - B^2] + a(9AD - BC) + 3BD - C^2 = 0;$$

les deux racines de cette équation sont les coefficients angulaires du système unique des diamètres conjugués ; les deux diamètres conjugués ont pour équation

$$y(3Aa^2 + 2Ba + C) + x(Ba^2 + 2Ca + 3D) = -Ea^2 - Fa - G,$$
$$y(3Aa'^2 + 2Ba' + C) + x(Ba'^2 + 2Ca' + 3D) = -Ea'^2 - Fa' - G,$$

d'où

$$x = \frac{aa'[3AF - 2BE] + (a + a')[3AG - CE] + 2BG - CF}{2aa'(3AC - B^2) + (a + a')(9AD - BC) + 2(3BD - C^2)} = \frac{P}{Q},$$

ou

$$aa' = \frac{3BD - C^2}{3AC - B^2}, \quad a + a' = \frac{BC - 9AD}{3AC - B^2},$$

substituant ces valeurs, on a

$$Q = 4[3AC - B^2][3BD - C^2] - (9AD - BC)^2.$$

Si $Q > 0$, a et a' sont imaginaires; mais l'intersection des diamètres est toujours réelle. Dans ce même cas les trois racines de l'équation $Aa^2 + Ba^3 + Ca + D = 0$ sont réelles (*V.* t. III, p. 164), et réciproquement lorsque les racines de cette équation sont réelles, la courbe n'a pas de diamètres conjugués. Si $Q = 0$, deux ou trois racines de cette équation sont égales, et l'intersection des diamètres est à l'infini, les diamètres deviennent des asymptotes situées à l'infini ; lorsque les trois racines sont égales, tous les diamètres sont parallèles, voir ci-dessus (LXI).

Le carré de la tangente de l'angle des deux diamètres conjugués

$$-\frac{-Q}{3AC - B^2} = \frac{-Q}{[B^2 - 3AC + C^2 - 3BD + (9AD - BC)\cos\gamma]^2},$$

γ étant l'angle des axes.

Lorsque les diamètres conjugués existent, en les prenant pour axes, il est évident que tout ce qui multiplie y^2 et x^2 disparaît, et l'équation se réduit à cette forme :

$$Ay^3 + Dx^3 + Fxy + Hy + Ex + F = 0.$$

Exemple : $y^2x - mx^2y - nxy = 0$; équation du système de trois droites, on a $A = 0$, $B = 1$, $C = -m$, $D = 0$, $E = 0$, $F = -n$, $G = 0$.

L'équation aux diamètres conjugués se réduit à $a^2 - ma + m^2 = 0$; ainsi les diamètres conjugués n'existent pas ;

$$x = -\frac{n}{3m}.$$

On trouverait de même $y = +\frac{n}{3}$; ainsi le point réel d'intersection est le centre de gravité de l'aire du triangle.

LXV. Théorie des *enveloppes diamétrales*.

Problème. Trouver l'enveloppe des diamètres d'une ligne de degré m?

Solution. On a pour l'équation d'un diamètre l'équation (35), (LIX); prenant la dérivée par rapport à a, il vient $x[(1-m)a'_m - aa''_m] - a''_m y = a''_{m-1}$; a étant connu, on a ainsi deux équations du premier degré entre x et y; on peut donc déterminer pour chaque valeur de a, les coordonnées du point où le diamètre touche son enveloppe; et si l'on élimine a, on obtient l'équation de l'enveloppe des diamètres; or l'équation (35) est du premier degré en x et y, et de degré $m-1$ en a; sa dérivée aussi du premier degré en x et y est de degré $m-2$; le degré de l'enveloppe ne peut dépasser $(m-1)(m-2)$

Observation. L'enveloppe n'admet que $m-1$ tangentes parallèles (coroll. LXI), donc la *polaire réciproque* de l'enveloppe diamétrale est au plus du degré $m-1$; comme nous le verrons dans la théorie de ces polaires, le plus important progrès que la géométrie doit à M. Poncelet; ainsi dans les lignes du second degré, la polaire réciproque de l'enveloppe est une droite; donc l'enveloppe diamétrale est un point; ce qui est évident. Tm.