TERQUEM

Démonstration du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles ; point de moyenne distance

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 153-156

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__153_0>

DÉMONSTRATION.

Du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles ; point de moyenne distance.

—

I. Soit

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

une équation algébrique à coefficients réels et de degré m.

Et soit

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad (2)$$

une autre équation algébrique à trois variables et de degré n.

Éliminant y, on obtient une équation de la forme

$$Ax^{mn} + Bx^{mn-1} + \text{etc.} = 0, \qquad (3)$$

A, B,... sont des fonctions entières de z, et des coefficients des deux équations ; supposons que par la nature de la question qui a fourni les deux premières équations, nous sachions, 1° qu'à une même valeur de x, ne peuvent répondre que p valeurs de z ; 2° que pour p valeurs finies de z, toutes racines de l'équation

$$f(z) = 0, \qquad (4)$$

l'équation (3) acquière p racines égales chacune à l'infini. Il est évident que dans ces deux hypothèses, les p premiers coefficients de l'équation (3) sont nécessairement de la forme $Mf(z)$, où M ne renferme que les coefficients des équations (1) et (2) ; divisant tous les coefficients de l'équation par $f(z)$, on obtient une nouvelle équation dont les p premiers coefficients sont indépendants de z ; par conséquent les fonctions symétriques des racines qui ne dépendent que de ces p premiers coefficients, conservent la même valeur, quelle que soit la valeur de z.

Si les mêmes hypothèses subsistent, pour le résultat de l'élimination de x, entre les équations (1) et (2), on en déduira les mêmes conclusions.

II. Prenons pour l'équation (2), celle-ci :

$$zD_y + D_x = 0, \qquad (2)$$

D_y est la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à y, et D_x la dérivée de la même fonction par rapport à x ; l'équation (2) est donc de degré $m - 1$ par rapport à x et y ; éliminant y, on obtient une équation de la forme :

$$Ax^{m(m-1)} + Bx^{m(m-1)-1} + \ldots = 0, \qquad (3)$$

or z est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe, ayant pour équation $F(x, y) = 0$; à une même valeur de x, ne correspondent donc que m valeurs de z ; ainsi dans l'équation (3), le degré de z ne peut dépasser m ; de plus, si dans l'équation (1) on ne prend que les termes de degré m, et qu'on y fasse $x=1$, $y=z$; et qu'on représente le résultat par $f(z)$. Si on pose :

$$f(z) = 0, \qquad (4)$$

les racines de cette équation sont les m coefficients angulaires relatifs aux asymptotes, c'est-à-dire aux tangentes qui ont un point de contact à l'infini ; donc par chaque racine de l'équation (4), deux racines de l'équation (3) deviennent infinies, ainsi A et B sont de la forme $Mf(z)$; donc $\frac{B}{A}$ est indépendant de z, et la somme des racines de cette équation ne dépend pas de z ; par les mêmes raisonnements, on parvient à la même conclusion en éliminant x, entre les deux équations (1) et (2).

III. *Théorème de M. Chasles.* A une courbe algébrique de degré m, on peut mener, analytiquement parlant, $m(m-1)$ tangentes parallèles; le point de moyenne distance des $m(m-1)$ points de contact reste le même, quelles que soient les directions des tangentes.

La démonstration est une conséquence immédiate du paragraphe précédent.

IV. On étend facilement ce théorème aux plans tangents à une surface; soit $F(x, y, z) = 0$, l'équation de cette surface, et soient p, q les coefficients angulaires qui déterminent la direction du plan tangent. On aura les deux équations $pD_z + D_x = 0$, $qD_z + D_y = 0$; éliminant z et y, on parvient à une équation entre x, p, q; raisonnant sur cette équation comme ci-dessus, sur l'équation (3), on en déduit les mêmes conséquences.

V. Le beau théorème de M. Chasles, conduit à cette généralisation; dans une courbe algébrique de degré m, si on prend pour un système d'axes donné, tous les points où tous les coefficients différentiels d'un même ordre sont égaux à un nombre donné; le point de moyenne distance de tous ces points est fixe, quel que soit le nombre. Le moyen de démonstration est le même. En effet, on peut toujours parvenir à une équation renfermant la relation entre l'abscisse et ce nombre; à chaque valeur de l'abscisse ne correspondent que m de ces nombres, donc dans cette équation m est la plus haute puissance à laquelle ce nombre puisse se trouver élevé, et à l'infini asymptotique, ce nombre est évidemment nul; donc les deux premiers coefficients de l'équation ordonnée par rapport à l'abscisse, renferment ce nombre élevé à la même puissance m; donc etc., etc.

VI. D'après la théorie de l'élimination, le coefficient A ne contient que les coefficients de l'équation (1) appartenant aux termes de degré m, et B ne contient que ces mêmes coefficients, plus ceux qui appartiennent aux termes de degré $m - 1$; de sorte que pour toutes les lignes dont les équations ont les mêmes termes de degré m et $m - 1$, les points de moyenne distance ci-dessus déterminés (V) sont les mêmes. Or le système des m asymptotes est une de ces lignes ; ces asymptotes se coupent en $\frac{m(m-1)}{1.2}$ points ; ce sont les seuls points doubles de la ligne ; de sorte que les droites qui passent par ces points peuvent être considérées comme des tangentes ; par conséquent le point fixe relatif aux tangentes parallèles est aussi le point de moyenne distance des $\frac{m(m-1)}{1.2}$ points d'intersection des asymptotes.

Observation. Il est presque superflu d'avertir que toutes ces propositions sont énoncées dans un sens purement analytique ; plusieurs de ces points peuvent être situés à l'infini, devenir imaginaires, etc. ; mais comme il s'agit de fonctions symétriques, ces circonstances n'invalident pas ces propositions.

VII. Les m asymptotes forment un polygone déterminé par $2m - 3$ données. Par conséquent dans toute ligne de degré m, il y a au moins $2m - 3$ fonctions des coefficients qui restent constantes, quel que soit le déplacement de l'origine et des axes.

(*La fin prochainement.*)