Nouvelles annales de mathématiques

HUET

Note sur la détermination du rapport π de la circonférence au diamètre, par la méthode des périmètres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 156-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__156_1>

NOTE

sur la détermination du rapport π de la circonférence au diamètre, par la méthode des périmètres.

PAR M. HUET,

regent de mathématiques spéciales au collége de Pamiers.

Le nombre π, qui représente le rapport constant de la circonférence au diamètre, représente encore la longueur d'une circonférence dont le diamètre est l'unité ; ce nombre sera donc connu si l'on parvient à calculer directement la longueur de la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Pour résoudre ce problème, il faut d'abord résoudre le suivant :

Étant donnés les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, calculer les périmètres des polygones réguliers de $2n$ côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit.

La figure qu'emploie Legendre, dans sa Géométrie, pour résoudre le problème qui conduit à la détermination du nombre π par la méthode des surfaces, peut sans aucune modification nous servir à résoudre aussi celui-ci (*).

Soit AB et CD (*fig.* 7) les côtés des polygones réguliers inscrit et circonscrit de n côtés, AE et FG les côtés des polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés ; appelons a et b les périmètres des deux premiers polygones, a' et b' les périmètres des deux seconds, on a évidemment :

(1) $a = n\mathrm{AB} = 2n\mathrm{AK}$, (2) $b = n\mathrm{CD} = 2n\mathrm{CE}$,

(3) $a' = 2n\mathrm{AE}$, (4) $b' = 2n\mathrm{FG}$.

Les égalités (1) et (3) donnent :

$$a : a' :: \mathrm{AK} : \mathrm{AE}$$

ou, puisque les triangles AEK, FEO sont semblables,

$$:: \mathrm{EO} : \mathrm{FO},$$

ou bien, à cause des triangles semblables FEH, FEO,

$$:: \mathrm{HE} : \mathrm{FE}$$

ou, en doublant les termes du second rapport,

$$:: \mathrm{AE} : \mathrm{FG}$$

(*) M. Lionnet donne la même demonstration (*Géom.*, p. 157, 2e édition) ; de même M. Cirodde (*Géom.*, p. 173). Tm.

ou encore :

$$:: 2n\text{AE} : 2n\text{FG},$$

ou enfin, à cause des égalités (3) et (4),

$$:: a' : b'.$$

Cette proportion nous donne :

$$a' = \sqrt{ab'}. \tag{5}$$

Des égalités (2) et (4) on tire de même :

$$b : b' :: \text{CE} : \text{FG},$$
$$:: \text{CE} : 2\text{FE}.$$

Doublant les termes du premier rapport et divisant les conséquents par 2, on trouve :

$$2b : b' :: \text{CE} : \text{FE};$$

d'où

$$2b - b' : b' :: \text{CF} : \text{FE}$$

ou, puisque FO est bissectrice de l'angle COE,

$$:: \text{CO} : \text{OE}$$

ou, à cause des parallèles AB et CD,

$$:: \text{AO} : \text{OK},$$

ou bien

$$:: \text{OE} : \text{OK},$$

ou bien, à cause des triangles semblables CEO, AKO,

$$:: \text{CE} : \text{AK},$$

ou encore

$$:: 2n\text{CE} : 2n\text{AK},$$

ou enfin, à cause des égalités (2) et (1),

$$:: b : a.$$

De cette proportion on tire :

$$2b : b' :: a + b : a;$$

d'où

$$b' = \frac{2ab}{a+b}. \tag{6}$$

Les relations (5) et (6) permettront de calculer facilement les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits de 12, 24, 48, 96, etc. côtés, en partant des périmètres des hexagones inscrit et circonscrit au cercle dont le diamètre est 1, qu'on trouve immédiatement. Par suite on trouvera, à une approximation aussi grande qu'on le voudra, la longueur de la circonférence dont le diamètre est l'unité, c'est-à-dire le nombre π.

On peut, du reste, déterminer une limite supérieure du nombre des opérations qu'on devra faire pour obtenir une approximation demandée.

Pour cela, nous allons prouver que $b' - a' < \frac{1}{4}(b-a)$.

On a $$b'^2 - a'^2 = b'^2 - ab' = b'(b'-a).$$

D'ailleurs,

$$b' - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{ab - a^2}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b}.$$

Donc

$$b'^2 - a'^2 = \frac{ab'(b-a)}{a+b} = \frac{a'^2(b-a)}{a+b};$$

d'où l'on tire :

$$b' - a' = \frac{a'}{a'+b'} \cdot \frac{a'}{a+b}(b-a).$$

Or $\frac{a'}{a'+b'} < \frac{1}{2}$, puisque $b' > a'$.

De plus, $b > b'$, donc $a+b > a+b'$; par suite $\frac{a+b}{2} > \frac{a+b'}{2}$, et à fortiori $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab'}$, puisque la moyenne arithmétique entre deux quantités est plus grande que la moyenne géométrique entre ces mêmes quantités.

On a donc, puisque $a' = \sqrt{ab'}$, $\frac{a+b}{2} > a'$; d'où $\frac{a'}{a+b} < \frac{1}{2}$. Il résulte de là que

$$b' - a' < \frac{1}{4}(b-a).$$

On trouverait de même $b'' - a'' < \frac{1}{4}(b' - a')$ et à fortiori $< \frac{1}{4}(b - a)$. Donc, en général, en appelant n le nombre de fois que les formules (5) et (6) auront été employées,

$$b_n - a_n < \frac{1}{4^n}(b - a).$$

Il est clair maintenant que si l'on veut obtenir le nombre π à moins de $\frac{1}{10^m}$ près, il suffira de déterminer pour n un nombre tel qu'on ait :

$$\frac{1}{4^n}(b - a) \overset{=}{<} \frac{1}{10^m};$$

d'où l'on pourra tirer n par tâtonnement au moyen des logarithmes. En prenant les logarithmes, il vient :

$$m + \log(b - a) \overset{=}{<} n \log 4;$$

d'où

$$n \overset{=}{>} \frac{m + \log(b - a)}{\log 4},$$

qui donne la limite cherchée.

Le nombre des côtés des polygones dont a et b sont les périmètres dans l'application numérique étant 6 ; celui des polygones dont les périmètres sont a' et b' est $6 . 2$; celui des suivants est 6.2^2, et ainsi de suite. Donc, en général, celui des polygones dont a_n et b_n sont les périmètres sera $6.2^n = N$, formule qui fera connaître le nombre N des côtés des deux derniers polygones auxquels il faudra s'arrêter.

Note. Voir pour le calcul de π une note de M. Finck (*Géom.*, p. 292, 3e édit.).