NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACHETTE

Note sur les polygones réguliers inscriptibles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 175-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__175_0>

NOTE

sur les Polygones réguliers inscriptibles,

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences.

On sait dans les éléments, inscrire les polygones réguliers dont les nombres de côtés sont représentés par les trois formules

$$2^n, \quad 3.2^{n'}, \quad 5.2^{n''}.$$

Correspondant à des arcs qui sont des fractions de la circonférence représentées par

$$\frac{1}{2^n}, \quad \frac{1}{3.2^{n'}}, \quad \frac{1}{5.2^{n''}},$$

et l'on obtient une quatrième classe d'arcs sous-tendant les côtés d'une classe correspondante de polygones réguliers, représentée par

$$\frac{1}{3.5.2^{n'''}},$$

en faisant une soustraction $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5}$ de deux arcs choisis convenablement dans les trois premières formules.

Ne pourrait-on pas, par une opération analogue effectuée sur les arcs compris dans les quatre formules que nous avons citées, tomber sur une nouvelle formule, sur une nouvelle série de polygones ne rentrant pas dans ceux que déjà l'on sait inscrire? Il est évident d'avance que le résultat ne donnera rien de nouveau, car on aurait signalé cette remarque si simple dans tous les ouvrages élémentaires, en raison de son importance : mais deux mots suffisent pour démontrer l'inutilité de cette espèce de considération, dans la recherche qui nous occupe.

En généralisant, il suffit d'examiner si la somme algébrique :

$$\pm \frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{3.2^{n'}} \pm \frac{1}{5.2^{n'}} \pm \frac{1}{3.5.2^{n'''}},$$

donnera un arc, qui soit ou une partie aliquote de la circonférence encore inconnue, ou un multiple d'une partie aliquote inconnue. Or, en réduisant au plus petit dénominateur commun, et faisant la somme, on aura un certain numérateur et un dénominateur qui ne contiendra pour facteurs premiers que 3 et 5 à la première puissance, et 2 à une certaine puissance ; la fraction sera de la forme

$$\frac{N}{3.5.2^k},$$

et en la réduisant à la plus simple expression, comme on ne pourra que supprimer des facteurs au dénominateur, sans en introduire de nouveau, on n'aura ainsi qu'un arc multiple de l'un des arcs compris dans les quatre grandes classes que nous avons citées.

Cette opération n'est inutile que par la nature de ces quatre classes d'arcs. En effet, on sait que les beaux travaux de M. Gauss ont permis la division de la circonférence en 17 parties égales, et plus généralement en un nombre de parties égales représenté par $2^k + 1$, si $2^k + 1$ est un nombre premier, sans se servir d'autres instruments que de la règle et du compas. Or prenons :

$$\frac{3}{5} - \frac{10}{17} = \frac{1}{85}; \quad \text{ainsi on aurait l'arc } \frac{1}{85};$$

et on saura construire l'arc du polygone de 85 côtés. On en trouverait d'autres par le même moyen ; mais ce qu'on peut affirmer, c'est que jamais on ne tombera, par une telle opération, sur un arc tel que $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, 7, 11.... étant des nombres premiers qui n'entrent pas dans les dénominateurs des arcs que l'on a déjà trouvés. La possibilité de tomber sur un nouvel arc tient à la nature particulière de la grande classe des arcs de M. Gauss,

$$\frac{1}{2^k+1}.$$

Note. Par la théorie des *nombres*, l'immortel Gauss nous a appris à construire géométriquement l'arc $\frac{k\pi}{2^p(2^n+1)}$, k est un nombre impair quelconque ; p un nombre entier quelconque ; et n un nombre tel que 2^n+1 soit un nombre premier. Or, de quelque manière qu'on combine par voie d'addition ou de soustraction de telles fractions, on a toujours pour résultat une fraction de la forme $\frac{k'\pi}{2^r\text{P}}$, où P représente le produit de nombres premiers chacun de la forme 2^n+1 (t. III, 47, Lemme) ; ce sont donc les seuls arcs qu'on puisse construire ; ce qui exclut 7, 11, 13, etc., et avant cette découverte, on ne savait construire que les trois cas $n=0$, $n=1$, $n=2$.

On voit donc que la possibilité de diviser la circonférence en parties égales tient encore à ce qu'on peut toujours satisfaire en nombres entiers à l'équation $ax-by=1$, lorsque a et b sont premiers entre eux ; il existe une liaison singulière qu'on rencontre partout, entre les propriétés des nombres premiers et celles de la circonférence. Tm.