Terquem

Démonstration du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles ; points de moyenne distance

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 178-185

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__178_0>

DÉMONSTRATION

Du théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles et les plans tangents parallèles; points de moyenne distance.

(Fin, voir page 153.)

—

IX. Soit une ligne plane du degré m et une droite située dans son plan; d'un point P pris sur la droite, on peut concevoir qu'on ait mené $m(m-1)$ tangentes à la ligne de degré m; soit C le point de moyenne distance des $m(m-1)$ points de contact; en faisant varier le point P sur la droite, le lieu géométrique du point C décrit une ligne qui passe par le point de moyenne distance des tangentes parallèles; car on peut supposer le point P transporté à l'infini. Lorsque la droite entière se transporte à l'infini, la ligne des points C se réduit à un point unique.

Si $m = 2$, le lieu du point C est encore une conique semblable à la conique donnée et passant par son centre.

X. Lemme. Étant données n circonférences situées dans un même plan; menons dans chaque circonférence, un rayon parallèle à une droite variable de direction; le lieu géométrique du point de moyenne distance des extrémités des n rayons est une circonférence, ayant pour centre le point de moyenne distance des n centres, et pour rayon la somme algébrique des rayons divisée par n; donnant le même signe aux rayons dirigés dans le même sens et le signe opposé aux rayons dirigés dans le sens opposé.

Démonstration. Si la proposition est vraie pour n circonférences, il est facile de s'assurer qu'elle a lieu aussi pour

$n+1$ circonférences ; or elle est évidente pour deux circonférences, donc....

Corollaire. Si la somme algébrique des rayons est nulle, le point de moyenne distance reste fixe, et *vice versâ*.

XI. *Théorème.* Dans une ligne plane de degré m, la somme algébrique des $m(m-1)$ rayons de courbure correspondant aux $m(m-1)$ points de contact de tangentes parallèles, est nulle.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de M. Chasles, et du lemme précédent. Car le cercle de courbure a deux tangentes infiniment rapprochées, en commun avec la courbe.

Corollaire. R étant le rayon de courbure, les axes étant rectangulaires, on a $R = \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$; or aux $m(m-1)$ points de contact des tangentes parallèles, le facteur $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ est une quantité constante, la somme des $m(m-1)$ rayons de courbure est nulle ; donc aussi la somme des $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$ est nulle.

XII. *Théorème.* Dans une courbe plane de degré m, si à partir de chacun des $m(m-1)$ points de contact des tangentes parallèles, on porte sur la normale correspondante, et dans le sens du rayon de courbure, p fois le rayon de courbure ; p étant un nombre positif, on obtient $m(m-1)$ points, extrémités de ces normales ; leur point de moyenne distance est le même que celui des points de contact.

Démonstration. Soit x' l'abscisse du point de contact (axes rectangulaires), R le rayon de courbure ; X l'abscisse de l'extrémité de la longueur pR portée sur la normale, on a $X - x' = p\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$; la somme des $m(m-1)$ valeurs du second membre est nulle ; donc la somme des

$m(m-1)$ valeurs de X est égale à la somme de $m(m-1)$ valeurs de x'; il en est de même pour les ordonnées, donc, etc....

Corollaire. Faisant $p=1$; on voit que le point de moyenne distance des $m(m-1)$ centres de courbure, est le même que celui des points de contact; propriété signalée par M. Duhamel et dont le théorème précédent n'est que la généralisation.

Observation. Ce théorème subsiste même pour des droites menées par les points de contact sous une direction donnée.

XIII. Le lemme X est un cas particulier de cette proposition de mécanique. Soient un nombre quelconque de circonférences situées dans le même plan; que chacune soit parcourue par un point matériel, avec une vitesse uniforme représentée respectivement par le rayon du cercle, le centre de gravité de ces points décrit une circonférence, avec une vitesse uniforme égale à la résultante de toutes les vitesses simultanées, divisée par le nombre des points matériels; cette résultante transportée à un centre de gravité est une tangente à la circonférence décrite par ce point, et le rayon est égal à la résultante *divisée*. Pour trouver la position de la circonférence relativement à la tangente, il suffit de transporter au centre de gravité, les rayons *simultanés*, et les considérant comme des forces, la résultante donne la direction du rayon de la circonférence décrite par le centre de gravité.

Cette proposition est fondée sur ce que le centre de gravité se meut à chaque instant comme si toutes ces forces y étaient appliquées, et ces forces sont représentées par les rayons des cercles (II, 241).

M. Ossian Bonnet m'a fait remarquer que cette proposition n'est elle-même qu'un cas particulier d'un théorème d'Euler. On sait qu'un point matériel, soumis à une force attractive dirigée vers un point fixe en raison directe de la distance et ayant reçu une impulsion primitive, non dirigée vers cette distance, un tel point décrit une ellipse; si plusieurs ellipses sont décrites de cette manière, le centre de gravité de ces points décrit aussi une ellipse. C'est le théorème d'Euler.

XIV. *Problème.* Etant donnée une ligne de degré m, trouver l'équation d'une seconde courbe telle que si par un quelconque de ses points, on mène $m(m-1)$ tangentes à la première courbe, il y en ait au moins deux qui fassent entre elles un angle donné.

Solution. Soit $F(x, y)=0$, l'équation de la première courbe, rapportée à des axes rectangulaires; x', y', x'', y'', étant les coordonnées de deux points de cette courbe, on a les équations

$$F(x', y')=0, \quad (1); \qquad F(x'', y'')=0, \quad (2).$$

Les équations des tangentes qui passent par ces points sont

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'), \quad (3); \quad y-y''=\frac{dy''}{dx''}(x-x'') \quad (4);$$

a étant la tangente trigonométrique de l'angle formé par ces deux tangentes, on a

$$a\left(1+\frac{dy'}{dx'}\cdot\frac{dy''}{dx''}\right)=\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy''}{dx''}; \quad (5)$$

éliminant x', y', x'', y'', entre les cinq équations (1), (2), (3), (4), (5); le résultat est l'équation de la seconde courbe cherchée et dont le degré ne s'élève pas au-dessus de $m^2(m-1)^2$.

XV. Soit M un point de la seconde courbe et N, N', deux points de contact des deux tangentes menées par M à la première, et formant un angle dont la tangente $=a$; soient R, R' les deux rayons de courbure en N et N', et I le milieu de la corde NN', point de moyenne distance des points

N et N'; ce point varie avec le point M, et décrit une certaine courbe dont il est facile de trouver la tangente et le rayon de courbure. Si M_1 désigne un autre point de la seconde courbe, et N_1, N'_1 les points de contact correspondants sur la première courbe, l'angle des deux tangentes MN, M_1N_1 est égal à l'angle des deux tangentes MN', $M_1N'_1$; l'arc MM_1 est infiniment petit, les arcs NN_1, $N'N'_1$ deviennent aussi infiniment petits, et les angles de contingence étant égaux pour ces deux arcs, on a donc $\frac{NN_1}{R} = \frac{N'N'_1}{R'}$; les points N et N' se meuvent donc sur leurs cercles de courbure proportionnellement aux rayons de courbure; en vertu de la proposition XIII, on pourra donc construire les tangentes et les rayons de courbure de la ligne décrite par le point I milieu de la corde NN'.

En général, si n points matériels se meuvent sur la même courbe plane, ou sur des courbes différentes situées dans le même plan, avec des vitesses telles que, prises simultanément, elles soient respectivement proportionnelles aux rayons de courbure, on pourra construire pour chacune des positions simultanées des points, la tangente et le rayon de courbure de la ligne décrite par le centre de gravité du système.

XVI. *Théorème de Waring.* Soit $P_m + P_{m-1} + R = 0$, l'équation d'une ligne de degré m. P_m renferme tous les termes de degré m; P_{m-1} les termes de degré $m-1$ et R les autres termes. Soit de même $Q_n + Q_{n-1} + S = 0$, l'équation d'une courbe plane de degré n; ces deux lignes se coupent, généralement parlant, en mn points; le point de moyenne distance de ces mn points est le même, quels que soient R et S.

Démonstration. Le résultat de l'élimination de y entre les deux équations est de la forme $Ax^{mn} + Bx^{mn-1} + \text{etc.} = 0$. Or, dans A et B n'entrent que les coefficients qu'on rencontrent dans P_m et P_{m-1}, Q_n, Q_{n-1}; car si tous les coefficients qui entrent dans P_{m-1}, R, Q_{n-1}, S, deviennent nuls, les mn valeurs de x deviennent nulles; A ne peut donc renfermer que les coefficients qui entrent dans P_m et Q_n, et d'après le principe de l'homogénéité, B ne peut renfermer que ces mêmes coefficients combinés avec ceux de P_{m-1}, Q_{n-1}, et ainsi de suite, donc, etc.

Remarque. Cette proposition d'une extrême fécondité est énoncée (p. 55), dans les *Proprietates algebricarum curvarum*, édition de 1772, la première édition est de 1762; cet ouvrage important, peu connu, contient une foule de théorèmes géométriques, qu'on a réinventés dans ces derniers temps. C'est ainsi que dans une courbe de degré m, Waring cherche (prob. XV) l'équation qui a pour racines p rayons vecteurs, partageant la circonférence décrite de l'origine comme centre en p parties égales; il établit des théorèmes sur la somme, le rectangle de ces rayons, etc.

En général, la théorie de l'élimination et celle des fonctions symétriques fournissent un nombre inépuisable de propriétés géométriques; Waring en énonce quelques-unes, et il ajoute qu'on peut facilement en trouver une foule d'autres: *analytica enim problema facile in geometrica transformari possint et vice versa geometrica in algebraica* (p. 57), nous ne citerons de lui, qu'une transformation de ce dernier genre.

Soient a_1, a_2, a_3,... a_n, n quantités quelconques, on a toujours cette identité:

$$a_1a_2(a_1+a_2)+(a_1+a_2)a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots(a_1+a_2+a_3\ldots+a_{n-1})$$
$$a_n(a_1+a_2+a_3\ldots a_n)=a_n\,a_{n-1}\,(a_n+a_{n-1})+(a_n+a_{n-1})$$
$$a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots(a_n+a_{n-1}+\ldots a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+a_1).$$

Waring déduit cette identité d'une propriété de la parabole (p. 117), il serait intéressant de l'établir analytiquement.

XVII. D'après les principes de Waring, il est aisé de démontrer le théorème suivant : soit $P_m+P_{m-1}+P_{m-2}+R=0$, l'équation d'une ligne de degré m ; si en un point pris dans le plan de la courbe, on mène $m(m-1)$ tangentes ; le point de moyenne distance des $m(m-1)$ points de contact reste le même, quel que soit R.

XVIII. *Problème.* Trouver les équations du mouvement d'un point matériel assujetti à parcourir une conique donnée avec une vitesse proportionnelle en chaque position, au rayon de courbure correspondant à cette position.

Soit $y^2=2mx+nx^2$ l'équation de la coniqne ; axes rectangulaires. On a donc, d'après la condition du problème,

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{kds^3}{dxd^2y}; \quad \text{d'où} \quad dt=-\frac{1}{k}\frac{dxd^2y}{ds^2};$$

k est un nombre donné, on a

$$ds^2=\frac{[y^2+(m+nx)^2]dx^2}{y^2}=\frac{(1+n)y^2+m^2}{y^2}dx^2, \quad d^2y=-\frac{m^2}{y^3}dx^2;$$

d'où

$$dt=\frac{m^2}{k}\frac{dx}{y[(1+n)y^2+m^2]}, \qquad dx=\frac{ydy}{\sqrt{ny^2+m^2}},$$

$$dt=\frac{m^2}{k}\frac{dy}{\sqrt{ny^2+m^2}.\,[(1+n)y^2+m^2]};$$

d'où l'on tire $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Pour la parabole $n=0$, et $dt=\frac{m}{k}\frac{dy}{y^2+m^2}$, $t=\frac{1}{k}\text{arctang}=\frac{y}{m}$, on suppose qu'à l'origine $t=0$, ou bien $y=m\,\text{tang}\,kt$, $x=\frac{m}{2}\text{tang}^2.\,kt$.

Observation. En développant une courbe de manière que la vitesse angulaire du fil reste constante, alors la vitesse à l'extrémité du fil est proportionnelle à la longueur du fil, ou au rayon de courbure de la développante.

XIX. Nous devons ajouter au théorème énoncé au paragraphe V, qu'une ligne du degré m ne saurait avoir plus de $m(m-1)(2n-1)$, où les coefficients des différentiels de l'ordre n soient égaux à une quantité donnée.

XX. Soit $P_m + sP_{m-1} + s^2P_{m-2} + s^3P_{m-3} \ldots s_mP_0 = 0$, l'équation d'une ligne de degré m, où s est un nombre quelconque, et soit de même $Q_n + s'Q_{n-1} + s'_2Q_{n-2} + \ldots s_nQ_0 = 0$, l'équation d'une ligne de degré n; éliminant successivement x et y, on obtient d'après le théorème de Waring, les deux équations

$$Ax^{mn} + Bx^{mn-1} + \text{etc.} = 0,$$
$$A'y^{mn} + B'y^{mn-1} + \text{etc.} = 0.$$

A, A' renferment les coefficients de P_m et Q_n; B et B' les coefficients linéaires de s et s', et à l'aide des fonctions algébriques, on déduit beaucoup de propriétés géométriques sur les intersections d'un système de lignes semblables et semblablement situées, relativement à l'origine avec un système analogue d'autres lignes; entre autres sur le lieu du point de moyenne distance, qui décrit une droite, en faisant varier s; la théorie des diamètres de Newton est un cas particulier; car un système de lignes parallèles est toujours un système de lignes semblables et semblablement situées relativement à l'origine, etc.

Observation. M. Liouville a traité les mêmes matières dans un beau mémoire (t. VI, p. 345), où l'habile analyste généralise un théorème du célèbre M. Jacobi; théorème qui est une première généralisation d'un théorème d'Euler. Nous reviendrons là-dessus, en traitant des asymptotes et après avoir donné le parallélogramme de Newton, base explicite ou implicite, de toutes ces propositions.

Tm.