NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BACH

Sur la pile hexagonale

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 196-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__196_0>

SUR LA PILE HEXAGONALE.

PAR M. BACH,
professeur au collège royal de Strasbourg.

Considérons la base hexagonale représentée par la (*fig.* 1). Il s'agit de placer sur cette base une couche de boulets tangents entre eux ; or il est clair qu'on ne pourra placer des boulets dans deux intervalles adjacents ; mais si on les place dans les intervalles marqués par des points dans la (*fig.* 21), il est aisé de reconnaître que les boulets ainsi placés seront tous tangents entre eux.

La deuxième tranche ainsi obtenue et représentée par la (*fig.* 2), sera un hexagone irrégulier dont trois côtés non-consécutifs auront le même nombre de boulets que l'hexagone de base, et les trois autres un boulet de moins.

Sur cet hexagone irrégulier (*fig.* 22), se placera un hexagone régulier ayant un côté de moins que celui qui sert de base ; la place des boulets qui le constituent est indiquée par des points (*fig.* 22).

En continuant de la même manière, on arrivera à un hexagone régulier dont le côté a 2 boulets, sur lequel se placera un triangle équilatéral composé de 3 boulets, et enfin sur ce triangle équilatéral, se placera un dernier boulet qui terminera la pile.

Cela posé, résolvons les deux questions suivantes :

1° Trouver le nombre des boulets contenus dans un hexagone régulier dont le côté a n boulets.

Ce nombre est, comme on le verra facilement, $3n^2-3n+1$.

2° Trouver le nombre des boulets renfermés dans l'hexagone irrégulier dont le plus petit côté a n boulets, et le plus grand $n+1$.

Si l'on suppose prolongés les côtés renfermant $n+1$ boulets, on aura un triangle équilatéral pour lequel le nombre des boulets sera $n+1+2(n-1)=3n-1$. Le nombre des boulets contenus dans ce triangle sera

$$\frac{3n(3n-1)}{2}=\frac{9n^2-3n}{2}.$$

Pour avoir le nombre des boulets contenus dans l'hexagone irrégulier, je retranche du nombre précédemment obtenu, trois fois le nombre des boulets renfermés dans le triangle équilatéral, dont le côté en a $n-1$; ce nombre est $\frac{3n^2-3n}{2}$, et il reste pour le nombre cherché $3n^2$.

D'après cela, nous pourrons écrire le tableau suivant :

Pour l'hex. rég. ayant n boulets pour côté	$3n^2-3n+1$,
hex. irrég.	$3(n-1)^2$,
hex. rég. de $(n-1)$ boulets	$3(n-1)^2-3(n-1)+1$,
hex. irrég.	$3(n-2)^2$,
hex. de $(n-2)$	$3(n-2)^2-3(n-2)+1$,
hex. irrég.	$3(n-3)^2$,
hex. de 2	$3\times 2^2-3\times 2+1$,
tr. eq.	3×1^2.
Pour le boulet qui termine la pile	$3\times 1^2-3\times 1+1$.

En désignant par S la somme des boulets qui composent la pile dont la base est un hexagone régulier, dont le côté a n boulets, on aura

$$S=3\left(1^2+2^2+3^2\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2\right)+$$
$$+3\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)-3\left(1+2+3+\ldots+(n-1)+n\right),$$

d'où

$$S = 6\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)+3n^2-3(1+2+3\,..+n)+n=$$
$$=2n^3-3n^2+2n+3n^2-\frac{3n^2+3n}{2}=\frac{4n^3-3n^2+n}{2}.$$

Ainsi
$$S=\frac{4n^3-3n^2+n}{2}.$$

Note. Cette pile remplit-elle les conditions statiques pour se maintenir ? Tm.