Nouvelles annales de mathématiques

B. Finck

Sur l’élimination entre deux équations algébriques à deux inconnues. Nouveau théorème d’algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 198-205

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__198_1>

SUR L'ÉLIMINATION

Entre deux équations algébriques à deux inconnues.

Nouveau théorème d'algèbre.

PAR B. FINCK,
professeur à Strasbourg.

Étant données deux équations à deux inconnues

$$\varphi(x, y) = bx^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0,$$
$$\psi(x, y) = cx^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

où $b, b_1, \ldots b_m, c, c_1, \ldots c_n$, sont des fonctions entières de y; M. Labatie a prouvé, dans sa brochure de 1827, que l'équation qui donne toutes les bonnes valeurs finies de y est

$$Pc^m = 0,$$

P étant le produit des valeurs que prend $\varphi(x, y)$, si l'on y substitue pour x les n racines de $\psi(x, y) = 0$, supposée résolue par rapport à x; de telle sorte que si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, sont les racines, on a

$$P = \varphi(\gamma_1, y) \cdot \varphi(\gamma_2, y) \ldots \varphi(\gamma_n, y).$$

Dans la brochure citée, et mieux encore dans la seconde édition (1835), on trouve une méthode simple pour former Pc^m, au moyen du plus grand commun diviseur. De l'aveu de l'auteur, je l'ai rapportée dans mon Algèbre. J'ajouterai, qu'à mon avis, c'est la seule théorie complète de l'élimination. M. Minding, partant de la forme Pc^m, a donné le moyen d'estimer d'avance le degré de l'équation finale (Journal de M. Liouville, VI) ; il s'appuie à cet effet sur la détermination du degré de chacune des racines $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$; degré qu'il obtient par des réductions en séries.

J'ai montré dans une note insérée dans le même journal, que ces degrés peuvent être obtenus par d'autres moyens, et en suivant les mêmes idées, j'ai trouvé pour cela un théorème général que je vais faire connaître, après avoir donné la définition du degré :

Je dis qu'une fonction fy est du degré r, si $\frac{fy}{y^r}$ converge vers une limite finie différente de zéro, à mesure que y tend vers ∞. Si fy est une fonction rationnelle, cette définition est d'accord avec l'évaluation ordinaire du degré ; sinon elle détermine pour r un nombre qui jouit de la même propriété, savoir que si deux fonctions fy, f_1y sont des degrés r, r_1, leur produit $fy \cdot f_1y$ est du degré $r + r_1$.

Cela posé voici le théorème en question.

Soit une équation :

$$x^n f_\alpha y + x^{n-1} f_{\alpha_1} y + \ldots + x^{n-i} f_{\alpha_i} y + \ldots + f_{\alpha_n} y = 0. \quad (1)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont les degrés des fonctions entières qui servent de coefficients : prenez les nombres :

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{1}, \quad \frac{\alpha_2 - \alpha}{2}, \ldots \quad \frac{\alpha_i - \alpha}{i}, \ldots \quad \frac{\alpha_n - \alpha}{n}. \quad (2)$$

Parmi les racines de (1) *il y en a dont le degré sera égal au plus grand* (algébriquement parlant) *de ces nombres ; si*

$\frac{\alpha_i - \alpha}{i}$ *est ce maximum, et si de plus tous les termes de la série* (2) *qui suivent sont moindres que* $\frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, *il y aura* i *racines de ce degré, quel que soit le nombre des termes placés avant celui-ci, qui lui soient égaux.*

Cela fait, calculez la série :

$$\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{1},\ \frac{\alpha_{i+2} - \alpha_i}{2},\ldots\ \frac{\alpha_{i+e} - \alpha_i}{e},\ldots\ \frac{\alpha_n - \alpha_i}{n-i}. \quad (3)$$

Si $\frac{\alpha_{i+e} - \alpha_i}{e}$ *en est le plus grand terme, avec la condition que ceux qui le suivent soient moindres, tandis que parmi ceux qui le précèdent, il peut s'en trouver qui l'égalent; il y aura* e *racines du degré* $\frac{\alpha_{i+e} - \alpha_i}{e}$; etc.

Pour le prouver, divisons (1) par $f_\alpha y$ et par y^{nr}, r étant une indéterminée : on pourra écrire cette équation sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{x}{y^r}\right)^n + \left(\dfrac{x}{y^r}\right)^{n-1} \dfrac{y^{\alpha_1} + \ldots}{y^{\alpha+r} + \ldots} + \left(\dfrac{x}{y^r}\right)^{n-2} \cdot \dfrac{y^{\alpha_2} + \ldots}{y^{\alpha+2r} + \ldots} + \\ \qquad \ldots + \left(\dfrac{x}{y^r}\right)^{n-i} \cdot \dfrac{y^{\alpha_i}}{y^{\alpha+ir} + \ldots} + \ldots = 0.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Les degrés des coefficients des puissances de $\frac{x}{y^r}$, sont

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{1} - r,\ 2\left(\frac{\alpha_2 - \alpha}{2} - r\right),\ldots\ i\left(\frac{\alpha_i - \alpha}{i} - r\right),\ldots\ n\left(\frac{\alpha_n - \alpha}{n} - r\right). \quad (5)$$

Conservant l'hypothèse que dans (2), le maximum est $\frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, je fais $r = \frac{\alpha_i - \alpha}{i}$; dans la série (5) quelques termes s'annuleront, les autres deviendront < 0, après quoi si dans (4) on suppose que y marche vers ∞, tous les coefficients dont les degrés sont < 0, tendront vers zéro, de sorte que cette équation perdra tous les termes qui suivent $\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i}$, et l'équation prend la forme :

$$\left(\frac{x}{y^r}\right)^n + \ldots + A\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i} = 0.$$

Il y a donc $n-i$ valeurs de $\frac{x}{y^r}$, qui deviennent nulles, et i valeurs restent finies, différentes de zéro. Donc (1) a i racines du degré $r = \frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, et $n-i$ racines de degrés moindres.

Dans (2) donnons maintenant à r une valeur $< \frac{\alpha_i - \alpha}{i}$, les i racines qu'on vient de signaler, deviendront infinies avec y, et (2) perdra ses i premiers termes, et pourra se réduire à

$$\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i}\cdot(y^{\alpha_i}+\ldots)+\left(\frac{x}{y^r}\right)^{n-i-1}(y^{\alpha_{i+1}}+\ldots)+\ldots+(y^{\alpha_n}+\ldots)=0,$$

et on reconnaîtra qu'il y a e racines du degré $\frac{\alpha_{e+i}-\alpha_i}{e}$, etc.

Exemple. Soit l'équation :

$$x^4(y^6+\ldots)+x^3(y^2+\ldots)+x^2(y^7+\ldots)+x(y+\ldots)+y^2+\ldots=0.$$

Les quotients à calculer ici sont :

$$\frac{2-6}{1},\quad \frac{7-6}{2},\quad \frac{1-6}{3},\quad \frac{2-6}{4},$$

ou

$$-4,\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{5}{3},\quad -1.$$

Il y a donc deux racines du degré $\frac{1}{2}$.

Prenant ensuite :

$$x^2(y^7+\ldots)+x(y+\ldots)+y^2+\ldots=0,$$

on calcule :

$$\frac{1-7}{2}, \quad \frac{2-7}{2},$$

ou

$$-3, \quad -\frac{5}{2},$$

il y a donc deux racines du degré $-\frac{5}{2}$.

On conçoit qu'avec cela, on peut d'après M. Minding, évaluer le degré de P, et par suite celui de Pc^m. Si dans $\psi(x, y) = 0$, tous les coefficients sont du même degré n, toutes les valeurs de x sont du degré zéro, si de plus tous les coefficients de (x, y) sont de degré m', il s'ensuit que les fonctions $\varphi(\gamma_1, y)$, $\varphi(\gamma_2, y), \ldots \varphi(\gamma_n, y)$, sont de ce même degré m', et leur produit est du degré mn'; d'ailleurs c étant du degré n', c^m est du degré $m'n$ et c^mP, du degré $mn' + m'n$; théorème dont l'énoncé est dû à M. Labatie. (*Voyez* mon Algèbre.)

Si les équations proposées sont ce qu'on appelle les plus générales de leurs degrés, on trouve que $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, sont du premier degré, $\varphi(\gamma_1, y)$, $\varphi(\gamma_2, y), \ldots$ sont tous du degré m et c^mP du degré mn.

Ce théorème est ancien (Bezout); mais on néglige, si je ne me trompe, de démontrer qu'à chacune des mn valeurs de y, il ne répond pas plus d'une valeur de x. Je le prouve ainsi qu'il suit :

D'abord *en général* les mn valeurs de y sont différentes : car même dans un cas particulier elles le sont. En effet si

$$\varphi(x, y) = (x + k_1 y + l_1)(x + k_2 y + l_2) \ldots \ldots (x + k_m y + l_m),$$

il est évident que les mn valeurs de y sont, généralement différentes, et qu'à chaque valeur de y, il ne répond qu'une valeur de x. Car, pour en finir le plus promptement, les droites représentées par $\varphi(x, y) = 0$, sont, en général, coupées en mn points distincts, répondant à mn ordonnées différentes, par les droites $\psi(x, y) = 0$.

A propos d'élimination, le programme d'admission à l École polytechnique vient de faire un pas en arrière; il dispense les candidats de savoir distinguer les bonnes solutions des mauvaises. Qu'est-ce donc maintenant que l'élimination, et quel parti en tirera-t-on?

Messieurs les examinateurs se trouvent par conséquent dispensés de faire des questions qui s'y rapportent. Monsieur le rédacteur des nouvelles Annales a répété que le calcul différentiel devrait faire partie du programme. J'avais dans le temps proposé à feu Coriolis mes vues à ce sujet: que l'on commence, disais-je, par tolérer ce calcul, et au bout de deux ou trois ans, to s les candidats seront en mesure. On pourra l'exiger. Le savant que je viens de citer, avait à ce sujet les idées suivantes: certains cours se font dans toutes les écoles d'applications, notamment un cours de machines, etc. De pareils cours devraient rentrer a l'École polytechnique; ainsi le cours de machines qui s'y fait recevrait plus de développements, serait confié à un homme spécial; le cours d'astronomie à un autre. Tout le cours d'analyse et de mécanique de la première année, serait exigé des candidats la possibilité et la haute utilité de ces mesures étaient clairement prouvées. Mais M. Coriolis est mort!

Note L'idée d'introduire le calcul différentiel dans les éléments, comme je l'ai dit ailleurs (t. III, p. 581), appartient à D'Alembert. Il l'a exprimée en maint article de l'Encyclopédie. Je n'ai pas cet ouvrage sous la main, et à la première occasion j'en transcrirai un passage relatif à cet objet; il ne s'agit pas, bien entendu, de faire un cours spécial de calcul infinitésimal ainsi qu'il existe à l'Ecole polytechnique; mais il s'agit d'entremêler l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre, avec les principes de ce calcul et avec les algorithmes qui représentent ces principes ; c'est ainsi qu'il faut faire remarquer aux élèves, que le carré du sinus divisé par le sinus-verse d'un arc est une quantité finie, quelle que soit la petitesse de l'arc, propriété qui appartient à toutes les coniques ; c'est ainsi qu'il faut de suite faire écrire le binôme sous la forme taylorienne :

$$fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2}f''x + \dots$$

où x^m est remplacé par $f(x)$; et donner la théorie complète si facile des dérivées algébriques, et baser sur ces théories, la méthode des racines égales, des fonctions symétriques, des tangentes, contacts des divers ordres, des polaires, etc. On peut même aborder les fonctions fractionnaires et les transcendantes circulaires et logarithmiques. En élargissant les idées des disciplés, l'enseignement devient plus aisé, plus clair, plus riche et moins long. Quant aux théorèmes de MM. Minding et Finck, ils sont implicitement basés sur le parallélogramme de Newton, tel qu'il a été analytiquement établi par Lagrange; il y a similitude de raisonnements et de procédés. (Lacroix, C. D., introd., § 61, 2e édition.) La convergence des séries, les asymptotes, deux théories identiques, sont aussi fondées sur ce même parallélogramme.

La méthode d'élimination imaginée par Bezout, me paraît la plus naturelle, la plus conforme à son objet. Elle fournit même pour certain cas particulier, une solution que les autres méthodes ne peuvent donner ; Bezout en fait avec raison l'observation Et par cette méthode, on obtient l'équation finale tout ordonnée, avantage considérable dont les autres méthodes sont privées. Elle est applicable à un nombre quelconque d'équations, tandis que les autres se bornent à deux équations seulement et ne peuvent aller au delà, si ce n'est pour les fonctions symétriques ; mais ce procédé présente le grave inconvénient d'astreindre le calculateur à recommencer l'opération pour chaque inconnue, et nous laisse dans une ignorance complète sur la liaison entre les valeurs des inconnues. Tm.