Nouvelles annales de mathématiques

A. Guilmin

# Lettre. Sur les approximations et sur les fractions continues

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 4 (1845), p. 205-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__205_1>

## LETTRE

*Sur les approximations et sur les fractions continues.*

—

Monsieur le Rédacteur,

La question d'approximation traitée par M. Duterme, dans votre dernier numéro (p. 124), se résout immédiatement par l'emploi de la formule ($\alpha$) indiquée (t. I, p. 257, de vos Annales), et relative au calcul par approximation de l'incommensurable $\mathrm{A}^m$; cette formule donne pour limite de l'erreur qui peut être commise sur A quand on veut avoir $\mathrm{A}^m$ à $\frac{1}{\delta}$ près, $e=\frac{1}{m\mathrm{A}^{m-1}\delta}$.

Considérons l'un quelconque $a(q+\alpha)^n$ des moyens géométriques de la question proposée; on aura ici $e=\frac{1}{na(q+\alpha)^{n-1}\delta}$; on aura une limite à fortiori en prenant $e=\frac{1}{ma\,(q+\alpha)^{m+1}\delta}$, puisque $n$ n'est pas moindre que $m$. Mais $(q+\alpha)^{m+1}=\frac{b}{a}$; donc $e=\frac{1}{mb\delta}$ est une limite. C'est la même que celle de M. Duterme, car j'ai appelé $\frac{1}{\delta}$ ce qu'il appelle $\delta$.

Dans la note suivante (p. 126), M. Catalan démontre une proposition dont voici l'énonce : dans une fraction continue périodique, le nombre des périodes étant illimité, il est indifférent d'en prendre une de plus ou une de moins. Ce théorème n'est qu'une conséquence immédiate de la formule d'approximation relative aux réduites en général. En effet, soient

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{y}}} \qquad \text{et } y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}}$$

Si on forme successivement les réduites de $x$ et de $y$, en prenant dans chacune le même nombre de quotients incomplets, on aura chaque fois le même résultat pour les deux; or une réduite commune $\frac{Q}{Q'}$ obtenue à cette condition, diffère de $x$ et de $y$, *dans le même sens* d'une quantite moindre que $\frac{1}{Q'^2}$; donc la différence entre $x$ et $y$ est moindre à fortiori que $\frac{1}{Q'^2}$; or cette limite peut descendre au-dessous de tout nombre assignable : donc $x$ et $y$ doivent être considérés comme égaux .

M. Catalan a moins eu peut-être pour objet de démontrer cette proposition que d'établir les thorèmes qu'il indique et démontre chemin faisant. Ces théorèmes peuvent être démontrés plus simplement en même temps que la proposition elle-même.

Reprenons la fraction continue périodique :

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \text{etc.}\dots}}}}$$

Nommons $y_1$ la réduite $\frac{A}{A'}$, que l'on obtient en s'arrêtant à la première période; soient $y_n$, $y_{n+1}$, deux réduites quelconques $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, s'arrêtant chacune à la fin d'une période, et dont la deuxième en comprend une de plus que la première.

Soient encore $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$, les deux réduites qui précèdent immédiatement $y_n$ ou $\frac{P}{P'}$. Nous avons les égalités :

$$y_n \text{ ou } \frac{P}{P'} = \frac{Nd + M}{N'd + M'},$$

$$y_{n+1} = \frac{N\left(d + \frac{1}{y_1}\right) + M}{N'\left(d + \frac{1}{y_1}\right) + M'} = \frac{Py_1 + N}{P'y_1 + N'}; \tag{1}$$

d'où

$$y_{n+1} - y_n = \frac{Py_1 + N}{P'y_1 + N'} - \frac{P}{P'} = \frac{NP' - PN'}{(P'y_1 + N')P'} = \frac{\pm 1}{(P'y_1 + N')P'}. \tag{2}$$

L'égalité (2) prouve la proposition principale, celle que j'ai déjà démontrée; car en remplaçant $y_1$ par $\frac{A}{A'}$, on peut écrire :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\pm A'}{(P'A + N'A')\,P'}. \tag{3}$$

*Or* A' *est un nombre constant indépendant de* n, tandis que P' et N' peuvent dépasser toutes limites.

Elle prouve aussi l'un des théorèmes énoncés (p. 129, 3). Remplaçons de même $y_1$ dans $y_{n+1}$, nous aurons :

$$y_{n+1} = \frac{PA + NA'}{P'A + N'A'}.$$

Appelons Q et Q' ces deux termes; il est facile de prouver qu'ils sont premiers entre eux, et forment sans réduction la réduite $y_{n+1}$ ; en effet

$$y_{n+1} - y_n = \frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{P'Q - PQ'}{Q'P'};$$

en ayant égard à l'égalité (3) et à la valeur de $Q'$, on voit que

$$QP' - PQ' = \pm A'. \qquad (4)$$

Par suite si $Q$ et $Q'$ admettaient un commun diviseur $d$, ce nombre diviserait $A'$, et par suite $PA$ et $P'A$, d'après les valeurs de $Q$ et $Q'$ ; or $d$ serait premier avec $A$ puisque $\frac{A}{A'}$ est une réduite; donc il diviserait $P$ et $P'$, ce qui est impossible, car $\frac{P}{P'}$ est aussi une réduite. Donc la formule (1) fournit immédiatement la réduite $y_{n+1}$, et indique une loi pour former les réduites de période en période (p. 129, 2).

De plus l'égalité (4) prouve que si $A'$ divise $P'$, il divisera $Q'$ ; or pour $n = 1$, $P' = A'$; donc les dénominateurs des réduites $y_n$, $y_{n+1}$, etc., sont tous divisibles par $A'$, et on peut écrire :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\pm 1}{P'Q''},$$

en posant $\frac{Q'}{A'} = Q''$ (nombre entier).

Agréez, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus distingués. A. Guilmin.