AMPÈRE

Théorie du calcul élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 209-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__209_0>

THÉORIE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE.

PAR M. AMPÈRE. (Œuvre posthume.)

(Suite, voir p. 109 et 161.)

L'utilité qu'on avait retirée de la considération des nombres, et l'embarras que causaient ceux qui passaient de certaines limites, et dont on était obligé de se servir sans pouvoir s'en faire une idée bien précise, inspira une nouvelle sorte de comparaison qui produisit bientôt une nouvelle espèce de nombres. Elle résulta de la manière qu'on adopta de considérer l'assemblage de plusieurs unités comme une seule, de compter par exemple par douzaines, par centaines, etc., comme cela est encore en usage dans quelques circonstances de la vie civile; on retrouva alors tous les nombres dont la première comparaison avait fait naître l'idée, car une quantité pouvait être composée de une, deux, trois ou quatre douzaines ou centaines; mais la plupart des quantités ne pouvaient plus s'exprimer de cette sorte; on fut d'abord embarrassé pour exprimer les quantités qui, étant plus petites que la douzaine (en supposant que ce fût elle qui eût été choisie pour unité), ne pouvaient être considérées comme formées de la répétition de cette douzaine : on chercha alors à les exprimer en imaginant qu'elle fût divisée en un nombre convenable de parties égales; ce qui donna l'idée d'indiquer les différents résultats de ces divisions par les mots, *demi*, *tiers*, *quart*, *cinquième*, etc. Les nouveaux nombres qui étaient exprimés par ces mots faisaient, comme les nombres entiers, connaître la manière dont la quantité dont on voulait parler était formée de celle que l'on considérait comme unité, et en disant, par exemple, que deux pommes étaient le sixième d'une douzaine de pommes, on concevait la douzaine comme l'unité, dont la quantité de deux pommes était formée en divisant cette unité en six parties égales ; on donna à ces parties de l'unité choisie le nom d'*aliquotes.* Quant aux quantités plus grandes que cette unité, et qui ne pouvaient pas cependant être considérées comme formées de la répétition de cette unité, on les considéra comme formées de celle d'une de ses aliquotes, et pour exprimer, par exemple, la manière dont une troupe de quarante hommes pouvait être considérée, comme formée d'une douzaine d'hommes en divisant celle-ci en trois parties chacune de quatre hommes, et en répétant dix fois une de ces parties, on disait que cette quantité de quarante hommes était les *dix tiers* de celle qui avait été choisie pour unité. Les nouveaux nombres dont ces considérations nous ont donné l'idée s'appellent *nombres fractionnaires* ou *fractions*, suivant que la quantité est plus grande ou plus petite que l'unité à laquelle on la compare, et ils portent en commun le nom de *nombres rompus.*

27. Il est aisé de s'apercevoir ici que la signification des mots *unité* et *quantité* a déjà reçu une altération sensible en acquérant plus d'extension ; elle en a souffert une plus considérable quand une troisième sorte de comparaison a produit une nouvelle espèce de nombres.

28. On la découvrit en comparant des grandeurs continues, c'est-à-dire, entre les parties desquelles il n'y avait point de séparation naturelle, comme deux distances, par exemple, ou deux poids ; il suffisait que nous sentissions la possibilité de cette séparation pour concevoir une longueur formée de la réunion de cinq pieds, ou un poids résultant de celle de trois dixièmes de livre.

Il nous fut dès lors aisé de retrouver entre des grandeurs continues choisies convenablement tous les nombres entiers et rompus dont les comparaisons dont je viens de parler nous avaient donné l'idée; mais nous éprouvâmes plus de difficultés à déterminer avec précision le nombre qui résultait de la comparaison de deux grandeurs données. On dut d'abord s'apercevoir que, lorsque la plus petite des deux grandeurs n'était pas contenue exactement dans la plus grande, et que la manière dont celle-ci était formée de la première ne pouvait par conséquent pas être exprimée par un nombre entier, il fallait trouver une grandeur homogène plus petite, qui, étant contenue exactement dans chacune des deux autres, pût servir à trouver le nombre rompu demandé; en faisant voir, dans le cas, par exemple, où cette grandeur plus petite, à laquelle on a donné le nom de *com mune mesure* des deux proposées, était contenue cinq fois dans l'une et douze fois dans l'autre, que la plus petite était les *cinq douzièmes* de la plus grande, et celle-ci les *douze cinquièmes* de la première.

29. En exprimant ainsi par un nombre la manière dont une grandeur continue est formée d'une autre, on continue à donner le nom de quantité à celle que l'on considère comme formée de l'autre, et celui d'unité à celle-ci, quelque éloignée que cette signification soit de celle qu'avaient d'abord ces deux mots; nous nous conformerons à cet égard à l'usage universellement adopté.

On voit d'après cela comment il est arrivé que l'on a fini par faire du mot *quantité* un synonyme de *grandeur*. On n'admet en général dans un même calcul qu'une seule unité pour toutes les grandeurs d'une même espèce, et cette unité est ordinairement sous-entendue, en sorte que, s'il est question, par exemple, de plusieurs longueurs rapportées à l'unité appelée *pied*, on représente chacune dans le cours du calcul par le nombre qui exprime la manière dont elle est formée de cette unité, sans qu'on se mette en peine de la valeur particulière de celle-ci, dont il suffit de se souvenir à la fin du calcul pour en interpréter le résultat. Il est évident qu'alors toutes ces grandeurs sont considérées comme des quantités, ce qui porte à regarder ces deux mots comme synonymes; mais on aurait autant de raison de faire la même chose à l'égard des mots *grandeur* et *unité;* car s'il y a plus de grandeurs dans un même calcul considérées comme des quantités, qu'il n'y en a de prises pour unités, il n'en est pas moins vrai que toute grandeur peut être considérée indifféremment sous l'un ou l'autre point de vue, et que, comme nous l'avons déjà dit, on peut, dans la comparaison de deux grandeurs quelconques, prendre à volonté la plus petite ou la plus grande pour unité, et considérer l'autre comme une quantité formée de cette unité de la manière indiquée par le nombre qui résulte de cette comparaison, et qui est toujours entier ou fractionnaire quand la plus petite des deux grandeurs est prise pour unité, et toujours fraction dans le cas contraire.

30. On peut remarquer en passant que la comparaison de deux grandeurs pouvant ainsi être faite sous un double point de vue, il en résulte toujours deux nombres, qui ont entre eux une analogie réciproque bien remarquable; en sorte que, si l'un est, par exemple, six treiziemes, l'autre ne pourra être que treize sixièmes : c'est ce que nous appellerons dorenavant *nombres réciproques*, et l'on voit par cette définition que les fractions un demi, un tiers, un quart, etc., sont les nombres réciproques des entiers, deux, trois, quatre, etc. De même que la fraction sept huitièmes est réciproque du nombre fractionnaire huit septièmes.

31. C'est la nécessité de trouver une commune mesure à deux grandeurs pour exprimer exactement à l'aide d'un

nombre la manière dont l'une d'elles est formée de l'autre, qui a fait découvrir la troisième espèce de nombre dont nous traitons actuellement. En effet, après avoir imaginé le procédé pour trouver cette commune mesure, que nous ferons bientôt connaître, et dont l'invention remonte probablement à la plus haute antiquité, il dut arriver souvent qu'on n'en trouva point, et l'on dut croire longtemps que cela ne venait que de sa petitesse, qui la faisait échapper aux meilleurs instruments dont on pût se servir pour donner plus de précision à cette opération. Mais des calculateurs plus habiles, ayant cherché la manière dont une grandeur était formée d'une autre dans le cas où le nombre qui l'exprimait pouvait être déterminé par la seule considération des relations existantes entre elles, démontrèrent rigoureusement que deux grandeurs pouvaient être telles, qu'aucune grandeur plus petite ne pût leur servir de commune mesure; comme on prouve, par exemple, en géométrie, que cela arrive quand on compare la ligne droite qui sert de côté à un carré et celle qui en joint deux angles opposés.

32. Les grandeurs qui se trouvaient dans ce cas furent appelées *incommensurables*, et de même que, lorsqu'on n'avait pas pu exprimer par aucun des nombres entiers, les seuls connus jusqu'alors, la manière dont une quarantaine était formée d'une douzaine, on avait imaginé pour cela une nouvelle espèce de nombres, on en établit ici encore une nouvelle, à laquelle on donna le nom de *nombres irrationnels*; en sorte que les nombres exprimant en général la manière dont une grandeur est formée d'une autre étaient *rationnels* ou *irrationnels*, suivant que ces deux grandeurs avaient ou n'avaient pas de commune mesure.

(*La suite prochainement.*)