Eugène-Charles Catalan

Concours général, année 1833. Prix d'honneur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 214-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__214_0>

CONCOURS GÉNÉRAL, ANNÉE 1833.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. CATALAN (EUGÈNE-CHARLES),
Né à Bruges (Belgique), le 30 mai 1814.
(Collége de Saint-Louis. — Professeur · M. Delisle. — Institution de Reusse.)

—

Problème.

Couper un triangle par une droite, de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra ce problème: 1° lorsque les deux côtés coupés du triangle sont égaux, et en particulier quand le triangle est équilatéral; 2° lorsque les trois côtés du triangle sont inégaux.

Solution.

(*Fig.* 14.) Soient OAB le triangle proposé, $\overline{\text{ED}}$ (*) la sécante cherchée, G′ et G″ les centres de gravité de EOD et AEDB, et G le centre de gravité de AOB. Je prends pour axes les côtés $\overline{\text{OA}}$, $\overline{\text{OB}}$; pour origine, le sommet O, et je désigne enfin par a, b, les côtés $\overline{\text{OB}}$, $\overline{\text{OA}}$, et par α, β, les côtés correspondants $\overline{\text{OD}}$, $\overline{\text{OE}}$.

Cela posé, les deux triangles AOB, EOD, qui ont un angle égal O, sont entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle; ce qui donne, à cause de la première condition :

$$\frac{ab}{\alpha\beta}=\frac{m}{n};\quad \text{ou}\quad m\alpha\beta = nab \qquad (1)$$

$\frac{m}{n}$ étant le rapport connu de $\overline{\text{AOB}}$ à $\overline{\text{EOD}}$.

(*) Les figures contiennent plusieurs fautes, que le lecteur est prié de corriger.

Les équations des droites $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, sont respectivement :

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1,\ \frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1,$$

$$\text{ou } y=-\frac{b}{a}x+b \ (2),\ y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta \ (3).$$

L'équation de $\overline{G'G''}$, qui passe en G′ (x', y') et G″ (x'', y''), est

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') : \qquad (4)$$

Cette droite devant être perpendiculaire à $\overline{ED}$, on doit avoir, entre les coefficients de x, la relation

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0,$$

en faisant :

$$a=-\frac{\beta}{\alpha},\quad a'=\frac{y'-y''}{x'-x''},\quad \widehat{AOB}=\theta.$$

On tire de là,

$$a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a-\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}\cos\theta}{-\frac{\beta}{\alpha}+\cos\theta};$$

savoir :

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{\alpha-\beta\cos\theta}{\beta-\alpha\cos\theta}. \qquad (5)$$

Je n'ai point encore exprimé que les points G′, G″ sont les centres de gravité de $\overline{OED}$ et $\overline{DEAB}$; il faut, pour que cela ait lieu, que la somme des moments du triangle EOD et du quadrilatère AEDB, soit égale au moment du triangle AOB. Prenant donc $\overline{Ox}$ pour axes des moments, j'ai

$$P'T'+P''T''=PT ; \qquad (6)$$

P′, P″, P, désignant respectivement les perpendiculaires $\overline{G'H'}$, $\overline{G''H''}$, $\overline{GH}$, T′, T″, T sont les aires correspondantes.

Or $P = y' \sin\theta = \frac{1}{3}\beta\sin\theta$, $P'' = y''\sin\theta$, $P = \frac{1}{3}b\sin\theta$;

$$T' = \frac{n}{m}T, \quad T'' = \frac{m-n}{m}T;$$

ces valeurs se déduisent des centres de gravité des triangles, et aussi de (1). Par suite, l'équation (6) devient :

$$\frac{1}{3}\beta\sin\theta.\frac{n}{m}T + y''\sin\theta.\frac{m-n}{m}T = \frac{1}{3}b\sin\theta.T;$$

ou bien :

$$n\beta + 3(m-n)y'' = mb. \qquad (7)$$

En prenant les moments par rapport à $\overline{Oy}$, on obtient de même :

$$n\alpha + 3(m-n)x'' = ma; \qquad (8)$$

équation qui peut se déduire de la précédente.

Ces deux équations donnent

$$x'' = \frac{ma - n\alpha}{3(m-n)}, \quad y'' = \frac{mb - n\beta}{3(m-n)}. \qquad (9)$$

D'ailleurs, l'équation (4) doit être vérifiée par $x = x''$, $y = y''$; par conséquent :

$$\frac{mb-n\beta}{3(m-n)} - \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\beta - \alpha\cos\theta}\left(\frac{ma-n\alpha}{3(m-n)} - \frac{\alpha}{3}\right);$$

d'où

$$(a + b\cos\theta)\alpha - (b + a\cos\theta)\beta - \alpha^2 + \beta^2 = o. \qquad (A)$$

et

$$\alpha\beta = \frac{n}{m}ab = q. \qquad (B)$$

Les deux équations (A) et (B) détermineront α et β, ou la position de la sécante.

1° Le triangle étant isoscèle (*fig.* 15), par rapport aux côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, l'on a $a = b$, et l'équation (A) devient

$$a(1+\cos\theta)(\alpha - \beta) - (\alpha^2 - \beta^2) = o,$$

ou

$$(\alpha-\beta)\,[a\,(1+\cos\theta)-(\alpha+\beta)]=0 \ (\mathrm{A}') \quad \alpha\beta=\frac{n}{m}a^2 \ (\mathrm{B}').$$

L'équation (A′) se décompose donc en ces deux autres :

$$\alpha=\beta, \qquad \alpha+\beta=a\,(1+\cos\theta).$$

La première donne, à cause de (B′) :

$$\alpha=\beta=a\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}. \qquad (\mathrm{A}'')$$

La sécante est donc parallèle à la base dans le cas où le triangle proposé est isoscèle, et l'on a

$$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OA}}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}},$$

valeur très-facile à construire. Il est d'ailleurs évident que toutes les conditions du problème sont satisfaites.

Si l'on prend

$$\alpha+\beta=a\,(1+\cos\theta)=2a\cos^2\frac{1}{2}\theta, \quad \text{avec} \quad \alpha\beta=\frac{n}{m}a^2,$$

il en résulte

$$\alpha^2-2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\alpha+\frac{n}{m}a^2=0. \qquad (\mathrm{A}''')$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, on doit avoir

$$a^2\cos^4\frac{1}{2}\theta \overset{=}{>} \frac{n}{m}a^2, \quad \text{ou} \quad \cos^4\frac{1}{2}\theta \overset{=}{>} \frac{n}{m}.$$

On voit donc que la condition absolument nécessaire est $m>n$. Si l'on avait $m=n$, θ serait nul, et il n'y aurait plus de triangle. Si $\cos^4\frac{1}{2}\theta=\frac{n}{m}$, alors le premier membre de A‴ est un carré, et le triangle formé par la sécante est isoscèle ; et les côtés adjacents à l'angle O sont

$$\alpha=\beta=a\cos^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}a\,(1+\cos\theta).$$

Pour construire les racines de l'équation (A'''), je pose

$$\alpha + \beta = 2a \cos^2 \frac{1}{2}\theta = 2p\,, \quad \alpha\beta = \frac{n}{m} a^2 = q^2 :$$

la question est donc ramenée à trouver les deux côtés d'un rectangle équivalent à un carré donné q^2, et dont la somme de la base et de la hauteur est $2p$; problème très-facile.

2° Si le triangle isoscèle est en même temps équilatéral, toutes les remarques précédentes sont encore applicables ; il suffit de poser $\cos\theta = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Le triangle étant à la fois rectangle et isoscèle, on a toujours

$$\alpha = \beta = a\sqrt{\frac{n}{m}}, \quad \text{et} \quad \alpha^2 - a\alpha + \frac{n}{m} a^2 = 0.$$

Dans ce cas, pour que le second système soit possible, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{4} a^2 \overset{=}{>} \frac{n}{m} a^2, \quad \text{ou} \quad m \overset{=}{>} 4n.$$

On ne peut donc supposer le triangle cherché plus grand que le quart du triangle donné : si $m = 4n$, $\alpha = \beta$ et la seconde solution se confond avec la première.

3° Dans le cas général nous aurons à résoudre les deux équations

$$\beta^2 - \alpha^2 - M\beta + N\alpha = 0\,, \quad (C) \qquad \alpha\beta = q\,, \quad (D)$$

en posant $M = b + a\cos\theta$, $N = a + b\cos\theta$, $q =$ etc. La seconde donne $\beta = \frac{q}{\alpha}$; d'où

$$\alpha^4 - N\alpha^3 + Mq\alpha - q^2 = 0. \qquad (C')$$

Pour résoudre cette équation, il faudrait commencer par la ramener à la forme $\alpha^4 + p\alpha^2 + q\alpha + r = o$, puis chercher la réduite, trouver l'une des racines de cette réduite, etc., ce qui donnerait lieu à des calculs très-longs et ne pourrait nullement servir à construire les valeurs de α et β. Je remarquerai seulement :

1° Que, le dernier terme de l'équation (C′) étant essentiellement négatif, la racine α a au moins une valeur réelle, ou, ce qui est équivalent, que le problème a toujours au moins une solution.

2° Que, si l'on a $M = -N$, le premier membre est divisible par $\alpha^2 - q$, et donne pour quotient $\alpha^2 - M\alpha + q$; il y aurait donc alors deux solutions. Mais comme cette hypothèse revient à supposer $\theta = \pi$, ces deux solutions ne sont qu'illusoires.

Revenons aux deux équations

$$\beta^2 - \alpha^2 - M\beta + N\alpha = 0, \quad \text{(C)} \qquad \alpha\beta = q. \quad \text{(D)}$$

Pour construire les racines de ces deux équations, j'observe qu'en regardant α et β comme des variables, la première représente une hyperbole rapportée à des coordonnées parallèles à ses axes (les coordonnées étant supposées rectangulaires), et la seconde une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Il suit de là que, si sur deux droites perpendiculaires prises pour axes, ou, ce qui est préférable, si sur les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ du triangle proposé, l'on construit ces deux courbes, les coordonnées de leurs points de rencontre seront les valeurs de α et β, en sorte que la droite sécante sera déterminée.

Pour la première hyperbole, changeons α en $\alpha + \frac{N}{2}$, β en $\beta + \frac{M}{2}$: son équation devient

$$\beta^2 - \alpha^2 = -\frac{N^2 - M^2}{2} = -\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin^2\theta. \quad \text{(E)}$$

On voit que l'axe des y ou des β sera le second axe de l'hyperbole si l'on a $a > b$, et réciproquement. Les longueurs des demi-axes rendus réels sont d'ailleurs :

$$b' = a' = \frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{2(a^2 - b^2)}. \quad \text{(E′)}$$

Si l'angle θ est droit, l'hyperbole est équilatère, et

$$b' = a' = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - b^2)}.$$

Il est bien entendu que l'équation (E) est celle de l'hyperbole après que l'on a fait passer les axes par son centre déterminé par les coordonnées,

$$x = \frac{N}{2} = \frac{1}{2}(a + b\cos\theta), \quad y = \frac{M}{2} = \frac{1}{2}(b + a\cos\theta). \quad \text{(E'')}$$

Comme on peut toujours supposer que a, b et $\cos\theta$ sont des quantités positives, il s'ensuit que les deux courbes offriront à peu près la disposition indiquée sur la figure 17.

Dans les cas particuliers examinés d'abord, il est clair que les lieux géométriques s'appliquent également; si par exemple $a = b$, les équations (C) et (D) deviennent

$$\beta = \alpha, \qquad \alpha\beta = q, \quad \text{(F)}$$
$$\beta = -\alpha + a(1 + \cos\theta), \quad \alpha\beta = q. \quad \text{(F')}$$

Alors le premier système de valeurs est déterminé par la rencontre d'une droite passant à l'origine et de l'hyperbole $\alpha\beta = q$; le second système, par l'intersection de la même hyperbole avec la droite dont l'équation est

$$\beta = -\alpha + a(1 + \cos\theta).$$

On peut se proposer de chercher quelle est la courbe que décrit le point I, intersection de la sécante et de la droite qui passe par les centres de gravité G', G'', lorsque, les côtés a, b étant constants, l'angle θ varie. Pour cela, je prends les équations de ces deux droites; savoir :

$$y - \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\beta - \alpha\cos\theta}\left(x - \frac{\alpha}{3}\right), \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta, \quad \text{(G)}$$

et les équations

$$(a + b\cos\theta)\alpha - (b + a\cos\theta)\beta - \alpha^2 + \beta^2 = 0, \quad \alpha\beta = q. \quad \text{(B)}$$

Il est évident que, pour avoir la solution cherchée, il faut éliminer les quantités qui déterminent le triangle MOD, c'est-à-dire α, β et $\cos\theta$.

Or (G) donne $\frac{\beta}{\alpha}x = \beta - y$; multipliant par $\alpha\beta = q$, il vient $\beta^2 x = \beta q - qy$; d'où

$$\beta = \frac{1}{2x}q \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - qyx}, \qquad \text{(H)}$$

puis

$$\alpha = \frac{q}{\beta} = \frac{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - qyx}}{yx}. \qquad \text{(H')}$$

Et comme la première équation donne

$$\cos\theta = \frac{\alpha\left(x - \frac{\alpha}{3}\right) - \beta\left(y - \frac{\beta}{3}\right)}{\beta\left(x - \frac{\alpha}{3}\right) - \alpha\left(y - \frac{\beta}{3}\right)} = \frac{3\alpha x - \alpha^2 - 3\beta y + \beta^2}{3\beta x - \alpha\beta - 3\alpha y + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{3\alpha x - \alpha^2 - 3\beta y + \beta^2}{3(\beta x - \alpha y)},$$

la troisième devient

$$\left.\begin{array}{l} 3(a\alpha - b\beta)(\beta x - \alpha y) + (b\alpha - a\beta)(3\alpha x - 3\beta y + \beta^2 - \alpha^2) \\ \qquad - 3(\alpha^2 - \beta^2)(\beta x - \alpha y) = 0. \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Il resterait à introduire pour α et β leurs valeurs (H') et (H).

Si l'on voulait faire des applications numériques, il faudrait rendre calculables par logarithmes les formules qui ne ne le sont pas immédiatement. Pour cela, soit d'abord les racines de l'équation (A''),

$$\alpha^2 - 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta.\alpha + \frac{n}{m}a^2 = 0;$$

d'où

$$\alpha = a\cos^2\frac{1}{2}\theta \pm a\sqrt{\cos^4\frac{1}{2}\theta - \frac{n}{m}}.$$

Cette quantité α devient d'abord :

$$\alpha = a\cos^2\frac{1}{2}\theta\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{n}{m\cos^4\frac{1}{2}\theta}}\right).$$

Pour que α soit réelle, il faut que $\frac{n}{m\cos^4\frac{1}{2}\theta}$, soit plus petite que 1 ; on peut donc poser

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{n}{m\cos^4\frac{1}{2}\theta}}, \qquad \text{(K)}$$

alors α devient

$$\alpha = a\cos^2\frac{1}{2}\theta(1 \pm \cos\varphi),$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\varphi, \\ \beta &= 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\sin^2\frac{1}{2}\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L)}$$

Pour les valeurs (E) et (F), il n'y a d'autre transformation à effectuer que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Soit encore à rendre calculable la valeur $k = \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\beta - \alpha\cos\theta}$, trouvée plus haut, et soit $\beta > \alpha$.

On a $k = \dfrac{\frac{\alpha}{\beta} - \cos\theta}{1 - \frac{\alpha}{\beta}\cos\theta}$. Comme il y a des tangentes de toutes les grandeurs, je pose $\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{\alpha}{\beta}$, $\operatorname{tang}^2\varphi' = \cos\theta$; d'où

$k = \dfrac{\operatorname{tang}^2\varphi - \operatorname{tang}^2\varphi'}{1 - \operatorname{tang}^2\varphi\operatorname{tang}^2\varphi'}$. Or $\operatorname{tang}(\varphi + \varphi') = \dfrac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi'}{1 - \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'}$,

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi'}{1 + \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'};$$

donc

$$k = \operatorname{tang}(\varphi + \varphi')\operatorname{tang}(\varphi - \varphi').$$

Il n'est pas à craindre que l'arc φ' soit imaginaire : car l'angle θ est toujours supposé aigu.

Sur la figure 15, on a $\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}} = \frac{m}{n}$, d'où $\overline{OB}^2 : \overline{OD}^2 :: m : n$, donc $\overline{OE} = \overline{OD}$, est la première solution.

On prend ensuite (*fig.* 16), $\overline{GH} = \overline{OI} = a\cos\theta$, $\overline{GH'} = a$. Décrivant HKH', on mène la parallèle $\overline{KE'}$ à une distance égale à $\overline{OD} = a\sqrt{\frac{n}{m}}$. Par suite $\overline{HL} + \overline{H'L} = a(1 + \cos\theta)$, $\overline{KL}^2 = \overline{HL} \cdot \overline{H'L} = \frac{n}{m}a^2$; donc $\overline{HL}$ et $\overline{H'L}$ sont les longueurs α et β.

La seconde figure (*fig.* 17) est le cas général. Après avoir prolongé les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ du triangle donné, on décrit la circonférence OFB; par le point O, l'on décrit $\overline{AF}$. On porte $\overline{BF}$ en G et en H, sur les perpendiculaires $\overline{BG}$, $\overline{BH}$; joignant $\overline{HG}$, cette droite est déjà $\sqrt{2(a^2 - b^2)}$; menant $\overline{GI}$ parallèle à $\overline{OA}$, et faisant $\overline{GI} = \overline{GH}$, il vient

$$\overline{IK} = \sin\theta\sqrt{2(a^2 - b^2)} = 2a' = 2b'.$$

Menant les perpendiculaires $\overline{BL}$, $\overline{AM}$ sur les côtés $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, et faisant $\overline{AN} = \overline{OL}$, $\overline{BN'} = \overline{OM}$, il s'ensuit que $\overline{ON} = b + a\cos\theta$, $\overline{ON'} = a + b\cos\theta$. Si donc on prend $OP = \frac{1}{2}\overline{ON}$, $\overline{OP'} = \frac{1}{2}\overline{ON'}$, O sera le centre de la première hyperbole, dont les axes sont connus.

Pour la seconde, on fait

$$\overline{OR} = \frac{n}{m}a, \quad \text{d'où} \quad \overline{OT} = \overline{OS} = a\sqrt{\frac{n}{m}} = OS';$$

décrivant S'UA, il vient $\overline{OU} = \sqrt{\frac{n}{m}}\,ab = q$. Enfin, $\overline{VX}$

et $\overline{V'X}$ donnent le point X de la seconde hyperbole, qui rencontre la première en deux points; le premier en Z, l'autre dans le sens opposé, vers les coordonnées négatives; d'où l'on achève le triangle EOD, qui est celui demandé.

Cette figure montre qu'il y aura en général deux solutions imaginaires, et une autre qui ne satisfait pas tout à fait à l'énoncé. Quant au triangle OED, bien qu'il ne soit pas renfermé dans le premier triangle, il satisfait puisque l'on peut prendre le centre de gravité du quadrilatère AE BD, et le joindre au centre de OED, par une droite qui sera perpendiculaire à $\overline{ED}$.