NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TILLOT

Note sur la limite des racines

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 224-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__224_1>

NOTE

Sur la limite des racines (*).

PAR M. TILLOT,
professeur à Castres.

Lorsque, pour déterminer la limite supérieure des racines positives d'une équation, on part de l'une des formules $x = 1 + N$, $a = 1 + \sqrt[n]{N}$, on sait que généralement le nombre obtenu est trop fort; il me semble que l'erreur vient le plus souvent de ce que la méthode suivie dans la détermination des formules n'est pas assez générale.

Soit

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots + A_{m-h} x^h - \ldots - \\ - A_{m-n} x^n \ldots - A_{m-r} x^r \ldots = 0,$$

une équation dans laquelle A_{m-n} est le premier coefficient négatif, et A_{m-r} le plus grand. Il vient en divisant toute

(*) Voir tome I, p. 243 et tome II, p. 517.

l'équation par un coefficient quelconque positif précédant le premier terme négatif, et que je supposerai A_{m-h},

$$\frac{x^m}{A_{m-h}}+\frac{A_1}{A_{m-h}}x^{m-1}\ldots x^h\ldots-\frac{A_{m-n}}{A_{m-h}}x^n\ldots-\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}x^r\ldots=0;$$

pour avoir une limite supérieure, il suffit de satisfaire à l'inégalité

$$x^h>\frac{A_{m-n}}{A_{m-h}}x^n\ldots+\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}x^r,$$

ou aux suivantes :

$$x^h>\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}(x^n+x^{n-1}+\ldots+1),$$

$$x^h>\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right).$$

Cette dernière devient

$$(x-1)\,x^h \geqq \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}x^{n+1}; \qquad (1)$$

or, comme l'on a toujours $h \geqq n+1$, pour satisfaire à l'inégalité (1), il suffit de poser

$$x-1=\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}} \quad \text{d'où} \quad x=1+\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}.$$

On aura donc une limite supérieure, en ajoutant l'unité au quotient du plus grand coefficient négatif, par un coefficient quelconque positif précédant le premier terme négatif. Cette limite sera d'autant plus exacte, que le diviseur sera plus grand : il convient donc de diviser toujours par le plus grand coefficient positif précédant le premier terme négatif (*). Si le deuxième terme de l'équation était négatif, on retomberait sur la formule $x=1+N$. Cette méthode appliquée à l'équation

$$x^8+2x^7+80x^6-40x^5-80x^4-60x^3-30x^2-20x-30=0,$$

donne pour limite $x=1+\frac{80}{80}=2$.

(*) Consequence immédiate de la méthode ordinaire. Tm.

Les méthodes ordinaires donneraient $x = 81$ ou

$$x = 1 + \sqrt[3]{80} = 6.$$

On peut encore déduire de (1) une limite plus approchée que $x = 1 + \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}$. En effet en divisant par x^{n+1} il vient :

$$(x - 1)\, x^{h-n-1} \geqq \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}};$$

d'où

$$(x - 1)^{h-n} = \frac{A_{m-r}}{A_{m-h}} \quad \text{et} \quad x = 1 + \sqrt[h-n]{\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}}.$$

Pour avoir une limite supérieure, il faudra donc diviser le plus grand coefficient négatif par un coefficient quelconque positif précédant le premier terme négatif, extraire du quotient une racine d'un indice égal à la différence en exposants du terme positif qui a servi de diviseur, et du premier terme négatif, et ajouter au résultat l'unité.

On trouve ainsi pour l'équation

$$x^6 + 29x^5 + 38x^4 - 4x^3 - 50x^2 - 30x + 64 = 0,$$

$$x = 1 + \sqrt{\frac{56}{29}} = 1 + \sqrt{2} = 3\,;$$

les méthodes ordinaires donneraient $N + 1 = 57$,

$$+ \sqrt[n]{N} = 1 + \sqrt[3]{56} = 5.$$

Il est à remarquer que la première méthode eût donné la même limite 3.

Il reste à se demander si l'on obtiendra toujours ainsi une limite plus exacte qu'en partant de la formule $x = 1 + \sqrt[n]{N}$; pour que cela soit, il faut évidemment avoir la relation

$$\sqrt[h-n]{\frac{A_{m-r}}{A_{m-h}}} < \sqrt[m-n]{A_{m-r}}.$$

Il conviendra donc d'examiner dans chaque cas quel est celui des coefficients positifs qu'il faudra employer comme diviseur.

Si on prend le premier, on retombe sur les formules

$$x = 1 + \sqrt[n]{N} \text{ (*)}.$$