ABEL TRANSON

Note sur quelques questions d'arithmétique élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 227-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__227_1>

NOTE

Sur quelques questions d'arithmétique élémentaire.

PAR M. ABEL TRANSON,
répétiteur d'analyse à l'École polytechnique.

I.

Divisibilité par 11. Le procédé suivant, pour trouver le reste de la division d'un nombre par 11, me paraît d'une application plus facile que celui qu'on emploie ordinairement. — « Partagez le nombre proposé en tranches de deux chiffres en commençant par la droite. Au-dessous de chaque tranche écrivez son excès sur le plus grand multiple de 11 qui s'y trouve contenu. Faites la somme de cet excès en supprimant le nombre 11 à mesure qu'il se forme. La somme finale est le reste demandé. » — Voici un exemple du calcul.

$$\begin{array}{ccccc} 3, & 78, & 96, & 54, & 39. \\ 3, & 1, & 8, & 10, & 6. \end{array}$$

On voit que la somme des restes divisée par 11 donnera 6 pour reste; et 6 est aussi le reste de la division du nombre proposé (*v.* p. 73).

(*) La limite de M. Tillot est un cas particulier de la limite de Bret, qui est plus approchée (v. t. II, p. 526). Tm.

II.

Fractions décimales périodiques ; retour à leurs fractions génératrices, ou bien, *détermination de leurs limites.*

Pour le cas d'une période simple, M. Catalan a levé (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 465) la difficulté qu'on peut très-raisonnablement opposer à la méthode donnée dans la plupart des traités d'arithmétique. Il a fait voir que la fraction ordinaire donnée par la règle reproduirait par son développement la fraction périodique.—On peut étendre le même raisonnement à une fraction périodique mixte.

Pour prouver par exemple que

$$0{,}38457457\ldots..$$

a pour génératrice la fraction ordinaire

$$\frac{38457-38}{99900}$$

J'observe que cette dernière donnera lieu par son développement à la répétition de 38457 fois, moins 38 fois la période mixte

$$0{,}00001001001\ldots.$$

Prenons d'abord 38457 fois chacune des unités décimales de ce développement ; il en résultera les nombres décimaux suivants

$$\begin{array}{l} 0{,}38457 \\ 0{,}00038457 \\ 0{,}00000038457 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

dont la suite est indéfinie. Il faudrait les ajouter et ensuite retrancher de la somme 38 fois chacune de ces mêmes unités : c'est ce qu'on peut opérer avant l'addition, en supprimant dans le tableau précédent les deux premiers chiffres significatifs de chaque nombre si ce n'est dans le premier où on doit les laisser subsister. Dès lors il est manifeste qu'on trouvera pour somme la fraction périodique mixte proposée.

Après avoir prouvé que la fraction ordinaire donnée par la règle est la *fraction génératrice* de la fraction périodique correspondante, on peut prouver aussi qu'elle en est *la limite*; et c'est uniquement sous ce double point de vue de fraction génératrice et de limite qu'il semble qu'on devrait considérer l'expression dont il s'agit.

Pour prouver par exemple que $\frac{27}{99}$ est bien la limite de la fraction périodique

$$0{,}272727.....$$

j'observe premièrement que les expressions

$$\frac{27}{99}, \quad \frac{2727}{9999}, \quad \frac{272727}{999999}, \text{ etc.,}$$

sont équivalentes. D'après cela l'excès de $\frac{27}{99}$ sur les valeurs qu'on obtient en prenant successivement une, deux, trois... périodes reçoit les déterminations suivantes :

$$\frac{27}{99}-\frac{27}{99+1}=\frac{27}{99}\,\frac{1}{100}$$

$$\frac{2727}{9999}-\frac{2727}{9999+1}=\frac{27}{99}\,\frac{1}{10000}$$

$$\frac{272727}{999999}-\frac{272727}{:99999+1}=\frac{27}{99}\,\frac{1}{1000000}$$

. . . .

C'est comme on voit l'extension du procédé qu'on emploie ordinairement pour prouver que 1 est la limite de la fraction,

$$0{,}9999...$$

et ce même moyen s'applique identiquement aux périodes mixtes.

III.

Extraction de la racine carrée par approximation. Si on compare le calcul par l'approximation en décimales avec celui qu'on doit faire pour calculer l'approximation à moins d'une fraction quelconque $\frac{1}{\alpha}$; on verra que celui-là a sur l'autre un grand avantage, quoique d'ailleurs la règle soit la même. Il faut multiplier le nombre proposé par le carré de α, ce qui peut rendre fort laborieuse l'extraction de la racine carrée qu'on devra faire ensuite. Cependant le résultat de l'approximation sera peut-être d'ajouter à la partie entière de la racine une fraction dont le numérateur sera très-petit. Bien plus! comme on ne sait pas d'avance si le nombre proposé est ou n'est pas un carré parfait, de deux choses l'une : ou bien on ne fera l'extraction qu'après avoir multiplié le nombre proposé par le carré de α; et alors, si ce nombre est un carré parfait, on se sera imposé bien gratuitement un surcroît de peine ; ou bien on essayera d'abord l'extraction ; mais si elle ne se fait pas exactement il faudra donc tenir le calcul déjà fait pour non avenu, et recommencer tout.

La règle suivante a pour objet de parer autant que possible à cet inconvénient.

« Pour extraire la racine carrée du nombre N à moins d'une fraction d'approximation marquée par $\frac{1}{\alpha}$, tirez d'abord la racine à moins d'une unité ; soit a le résultat. Multipliez le reste de l'opération par α ; divisez le produit ainsi obtenu par le double de la partie déjà déterminée ; la partie entière du quotient, c'est-à-dire la partie entière de $\frac{(N-a^2)\alpha}{2a}$, étant multipliée par la fraction d'approximation, sera ce qu'il faut ajouter au nombre entier a pour avoir la racine cherchée avec le degré d'approximation voulu (en plus ou en moins)..... »

Cette règle suppose qu'on ait $\frac{\alpha}{2a} < 1$; condition qu'on pourra presque toujours examiner avant tout calcul, d'après le nombre des chiffres de a et au besoin aussi d'après le premier de ces chiffres qui se détermine à simple vue et sans tâtonnement.

En un mot, si $a + \frac{n}{\alpha}$ est la racine demandée avec le degré d'approximation voulue, et si e est la partie entière de $\frac{(N - a^2)\alpha}{2a}$; alors $a + \frac{e}{\alpha}$ sera l'un des deux nombres :
$a + \frac{n}{\alpha}, a + \frac{n+1}{\alpha}$.

Mais si on avait $\frac{\alpha}{2a} > 1$, par exemple supposons $\frac{\alpha}{2a} = n' + \gamma$, n' étant la partie entière ; alors le nombre e peut encore être utile à connaître, parce qu'il est toujours au moins égal à n, et tout au plus égal à $n + n' + 1$.

Dans ce cas donc, la division recommandée par la règle ci-dessus donnera au quotient un chiffre douteux et qu'il faudra confirmer par plusieurs essais. Mais le nombre de ces essais devant être tout au plus égal à $n' + 1$, ce sera au calculateur à prévoir si ce tâtonnement ne sera pas encore plus avantageux que la nécessité de remplacer l'extraction $\sqrt{N}$, par celle de $\sqrt{N\alpha^2}$.

D'ailleurs pour déterminer lequel des nombres rétrosuccessifs e, $e - 1$, $e - 2$, etc., est précisément égal au nombre n, voici le calcul très-simple qu'on devra faire.

Soit r le reste de la division de $N - a^2$, formez le tableau suivant à deux colonnes :

$$\frac{e^2}{a}, \qquad r$$

$$\frac{(e-1)^2}{\alpha}, \qquad 2a+r.$$

$$\frac{(e-2)^2}{\alpha}, \qquad 4a+r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(e-e')^2}{\alpha}, \qquad 2e'a+r.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En vous arrêtant aussitôt que le nombre de la première colonne, $\frac{(e-e')^2}{\alpha}$, sera inférieur au nombre $2e'a+r$ de la seconde. Alors $e-e'$ sera précisément le nombre n; c'est-à-dire que la racine approchée qu'on demande sera $a+\frac{e-e'}{\alpha}$.

En effet de l'inégalité

$$\frac{(e-e')^2}{\alpha}<2e'a+r,$$

on tire la suivante

$$2a(e-e')+\frac{(e-e')^2}{\alpha}<2ae+r$$

ou bien encore à cause de

$$(N-a^2)\alpha=2ae+r$$

$$a^2+2a\frac{e-e'}{\alpha}+\frac{(e-e')^2}{\alpha^2}<N$$

c'est-à-dire

$$a+\frac{e-e'}{\alpha}<\sqrt{N}.$$

Je termine sur ce point en observant que si α est un nombre décomposable en facteurs, cette circonstance favorisera l'application de la règle ci-dessus, parce qu'au lieu de construire immédiatement la fraction complémentaire $\frac{n}{\alpha}$, on pourra calculer successivement plusieurs fractions dont les premières auront par dénominateurs les facteurs de α et dont la somme devra être finalement $\frac{n}{\alpha}$. C'est ainsi que l'approximation en décimales revient en effet à calculer successivement les numérateurs de plusieurs fractions dont la somme forme une fraction totale du dénominateur voulu.

IV.

Extraction de la racine cubique. — A : à moins d'une unité. — B : à moins d'une fraction d'approximation donnée.

A. Chacun des chiffres de la racine étant déterminé par un quotient qui peut être trop fort donne lieu à un essai qui semble de nature à rendre l'opération très-laborieuse.

Mais d'abord, en ayant égard à ce qu'il n'y a pas lieu d'essayer un chiffre plus grand que 9, on reconnait que le nombre des essais inutiles que peut occasionner la détermination du second chiffre ne saurait dépasser *quatre*; et que sur chacun des autres chiffres à partir du troisième il ne saurait y avoir qu'*un* seul essai infructueux ; ce qui élève à $n+2$ le maximum des essais de ce genre dans la détermination d'une racine de n chiffres. — Cela résulte d'un théorème donné par M. Finck dans son arithmétique (liv. III, prop. XXIII) (1). Mais

---

(*) On peut démontrer cela comme il suit : soit a le nombre des dizaines de la racine $(a.10+b)$ du nombre N. Si on fait $b=c+\gamma$; c étant la partie entière de b, le nombre c sera le chiffre même des unités de la racine. On a d'ailleurs

$$\frac{N-a^3.1000}{3a^2.100}=c+\gamma+\frac{b^2}{a.10}+\frac{b^3}{3a^2.100}.$$

Et si e est la partie entière du quotient $\frac{N-a^3.1000}{3a^2.100}$; ce nombre e dépassera c du nombre total des unités qui sont contenues dans

$$\gamma+\frac{b^2}{a.10}+\frac{b^3}{3a^2.100}.$$

Or ce nombre sera d'abord le plus grand possible, si a est lui-même le plus

bien plus, à partir du quatrième chiffre de la racine, toutes les fois qu'un chiffre déterminé se trouvera trop fort, loin qu'on doive considérer cette circonstance comme donnant lieu à des essais infructueux, on pourra au contraire en tirer parti pour abréger notablement le calcul en se fondant sur les principes suivants, dont le lecteur trouvera facilement la démonstration.

1° *Si en déterminant le chiffre du rang* $\mu + 4$, *on trouve un quotient égal à* 10, *non-seulement le chiffre qu'on cherche est égal à* 9, *mais tous les chiffres consécutifs à celui-là en nombre* μ *le sont également.*

II° *Si en déterminant le chiffre du rang* $\mu + 3$ *on trouve un quotient inférieur à* 10, *mais trop fort, les chiffres consécutifs à celui-là en nombre* μ *seront tous des* 9.

Pour avoir les règles qui correspondent aux précédentes dans l'extraction de la racine carrée, il faudrait, dans les énoncés précédents, diminuer d'une unité les nombres qui marquent le rang du chiffre qu'on détermine actuellement.

Au reste, plutôt que d'attendre de ces circonstances accidentelles l'abréviation des procédés d'extraction, il faut, ce semble, appliquer la vraie méthode qui ne consiste pas à déterminer les chiffres *un à un*; mais à en déterminer un nom-

---

petit possible; c'est-à-dire égal à 1. Après cela si on suppose b entre 5 et 6, c'est-à-dire plus petit que 6, on trouve

$$\frac{b^2}{10} + \frac{b^3}{300} > 5.$$

D'où on conclut que dans ce cas l'excès de e sur c ne peut pas atteindre 6; c'est-à-dire que e ne peut pas atteindre 11. En excluant donc l'essai de $e = 10$, on ne peut avoir à faire au plus que *quatre* essais infructueux. Pour b entre 4 et 5, on trouverait le même résultat; mais pour toute autre valeur de b, le nombre d'essais serait moindre.

D'autre part dès qu'on a dépassé le second chiffre de la racine, a est au moins égal à 10, alors la quantité $\gamma + \frac{b^2}{a.10} + \frac{b^3}{3a^2.100}$, ne saurait atteindre 3 dans le cas de $b > 9$, qui d'ailleurs ne donne lieu à aucun tâtonnement; et cette même quantité est toujours inférieure à 2 dans toute autre supposition; d'où il résulte que le nombre e est tout au plus égal à $c + 1$.

bre toujours croissant par chacune des divisions successives ; se fondant, pour le calcul de la racine carrée, sur le principe d'abréviation déjà connu, et ensuite sur le principe un peu différent, mais tout à fait analogue, qui se rapporte aux racines cubiques ; principe qu'il faut, à ce que je crois, énoncer comme il suit : ***lorsqu'on a déterminé*** **n + 2** ***chiffres à la racine cubique on peut déterminer les*** **n** ***chiffres suivants par une seule division.***

Si on ne déterminait d'abord que $n+1$ chiffres pour calculer les n suivants par une seule division, comme on l'a proposé naguère, on risquerait de se tromper de deux unités en plus sur le dernier chiffre, au lieu qu'en suivant la règle de $n+2$ chiffres, on ne pourra se tromper que d'une seule unité en plus sur le dernier chiffre ; ce qui est la même limite d'erreur que quand on détermine les chiffres un à un.

B Pour calculer une racine cubique à moins d'une fraction d'approximation donnée, on pourra le plus souvent eviter les longueurs où entraînerait l'application de la règle générale. — Il faudra extraire d'abord la racine à moins d'une unité ; multiplier le reste de l'opération par la fraction d'approximation renversee ; et diviser ce produit par le triple carré de la partie entière de la racine.

En appelant a cette partie entière et $\frac{1}{\alpha}$ la fraction d'approximation, il faudra, dis-je, diviser le produit $(N-a^3)\alpha$ par $3a$. Soit e la partie entière du quotient, alors la racine du nombre proposé sera $a+\frac{e}{\alpha}$ à moins d'une erreur $\frac{1}{\alpha}$ en plus ou en moins, si toutefois on a

$$\alpha\left(\frac{3a+1}{3a^2}\right)<1,$$

condition qui sera satisfaite si on a $\alpha < a$.

Généralement si on suppose

$$\alpha\left(\frac{3a+1}{3a^2}\right) < n'$$

et si en même temps n est le numérateur de la fraction qu'on doit ajouter à a pour avoir la racine avec l'approximation voulue (en moins) ; alors le nombre e sera au moins égal à n' et pourra d'ailleurs être un quelconque des nombres consécutifs à celui-là jusqu'à $n+n'+1$ (*).