

OSSIAN BONNET

**Note sur les racines imaginaires des
équations algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 236-237

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__236_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur les racines imaginaires des équations algébriques.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique.

—
On sait depuis longtemps que lorsque les coefficients A, B, C de trois termes consécutifs

$$(1) \quad Ax^n, Bx^{n-1}, Cx^{n-2},$$

d'une équation (a) vérifient la condition

$$AC \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} B^2,$$

l'équation a au moins deux racines imaginaires; mais on n'a pas remarqué, je crois, qu'il suffisait que l'on eût :

$$AC \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{1}{2} B^2.$$

Voici comment cette dernière proposition peut être établie : supposons qu'en général la condition

$$(2) \quad AC \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} nB^2,$$

où n est un nombre quelconque, entraîne l'existence de

(*) (V. t. III, p. 234).

deux racines imaginaires dans l'équation (a). Multiplions le premier membre de cette équation par $x-q$; les termes (1) donneront lieu aux termes

$$\begin{array}{r|l} Ax^{n+1} + B & x^n + C \\ + Aq & + Bq \end{array} \Bigg| x^{n-1},$$

et pour que l'équation (a) ait deux racines imaginaires, il suffira, d'après la condition (2), que pour une valeur réelle de q , on ait

$$A(C + Bq) \begin{array}{l} = \\ > \end{array} n(B + Aq)^2.$$

Ce qui donne tout calcul fait :

$$AC \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left(1 - \frac{1}{4n}\right) B^2;$$

d'où l'on peut conclure en général que si la condition (2) indique la présence de deux racines imaginaires dans l'équation (a), pour $n = \alpha$, la même propriété subsiste pour $n = 1 - \frac{1}{4\alpha}$. Or quand $n = 1$, la condition (2) devient

$$AC \begin{array}{l} = \\ > \end{array} B^2$$

dont l'existence entraîne toujours celle de deux racines imaginaires dans l'équation (a), on peut donc prendre

$$n = \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \text{ etc.}$$

La loi de ces valeurs est facile à saisir ; on peut les représenter par la fraction $\frac{k}{2(k-1)}$, d'où l'on conclut que leur limite est $\frac{1}{2}$. De là résulte la proposition énoncée.

Note. Le théorème d'Euler donne $AC < \frac{n-1}{n} B^2$, pour caractère de l'existence d'imaginaires (v. t. II, p. 257); or n est au moins égal à 2, donc, etc. Tm.