NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes et problèmes sur les centres des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 260-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__260_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les centres des coniques.

I. *Problème.* Étant donnés trois points et le centre d'une conique, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient A, B, C les trois points, et O le centre donnés; faisons $AB = p$, $AC = q$, et prenons AB pour axe des x et AC pour axe des y; l'équation de la conique sera de la forme $y^2 + Bxy + Cx^2 - qy - Cpx = 0$; soit t l'abscisse et u l'ordonnée du centre. On a

$$t = \frac{Bq - 2Cp}{B^2 - 4C},\ u = \frac{BCp - 2Cq}{B^2 - 4C},\ \frac{t}{u} = \frac{Bq - 2Cp}{BCp - 2Cq},$$

$C = \dfrac{Bqu}{Bpt + 2(pu - qt)}$; mettant cette valeur de C dans celle de t et divisant par Bt, on obtient $B^2pt + B[2pu - 2qt - pq] = 2q(2u - q)$; d'où $B = \dfrac{2q}{p}$, $B = \dfrac{q - 2u}{t}$; les valeurs correspondantes de C sont $C = \dfrac{q^2}{p^2}$, $C = \dfrac{u}{t}\left(\dfrac{2u - q}{2u - p}\right)$.

1^{er} Cas. $B = \dfrac{2q}{p}$, $C = \dfrac{q^2}{p^2}$; l'équation de la courbe devient $\left(y + \dfrac{q}{p}x\right)\left(y + \dfrac{q}{p}x - q\right) = 0$; c'est le système de la droite BC et d'une droite parallèle passant par l'origine, et on sait qu'il y a alors une infinité de centres, situés sur la droite

$$2py + 2qx - pq = 0.$$

2^e Cas. $B = \dfrac{q - 2u}{t}$, $C = \dfrac{u}{t}\left(\dfrac{2u - q}{2t - p}\right)$; l'équation de la courbe devient :

$$\left.\begin{aligned} &t(2t - p)y^2 - (2u - q)(2t - p)xy + u(2u - q)x^2 - \\ &\quad - qt(2t - p)y - pu(2u - q)x = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

La nature de la courbe est déterminée par l'expression : $(2u - q)(2t - p)(2pu + 2qt - pq)$; c'est le produit des trois équations des côtés du triangle, ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle ABC; la position du centre donne le signe de chaque facteur.

II. *Théorème* Le lieu du centre d'une conique passant par trois sommets d'un triangle, et semblable à une conique donnée, est une ligne du quatrième ordre, touchant les trois côtés du triangle aux milieux de ces côtés.

Démonstration. La condition de similitude est exprimée par la relation $(1+C-B\cos\gamma)=a(B^2-4C)$ (t. I, p. 495); a est une constante donnée positive si la conique donnée est une hyperbole, et négative si cette conique est une ellipse. Substituant pour B et C leurs valeurs en t et u, on aura

$$[t(2t-p)+u(2u-q)+(2u-q)(2t-p)\cos\gamma]^2=$$
$$=-a(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq),$$

ligne du quatrième degré, sans asymptotes; ce qui est évident à priori, puisque le centre ne saurait être l'infini, sans que la conique devienne une parabole. Si l'on fait $t=0$, on a pour u quatre valeurs; deux égales à $\frac{q}{2}$, et les deux autres sont $p\left(\cos\gamma\pm\sqrt{a}\right)$; ainsi ces deux dernières valeurs ne sont réelles que pour l'hyperbole; on parvient à des résultats analogues en faisant $u=0$, le second membre doit être essentiellement positif; ce qui facilite la discussion de la courbe qui est du premier genre (Euler, *Int. in anal. inf.*, t. II, p. 140).

Lorsque la conique donnée est un cercle, alors $a=-\sin^2\gamma$, la courbe doit se réduire à un point; je n'ai pu parvenir à mettre cette réduction en évidence.

III. *Problème.* Étant donnés deux points d'une conique, une droite tangente et le centre, trouver une équation de cette conique.

Solution. Prenons la tangente pour axe des y, et la droite qui passe par les deux points fixes pour axe des x; soient toujours t et u les coordonnées du centre, quantités connues; remplaçant, dans l'équation générale de la conique, les six coefficients par leurs valeurs en k, k', l, l', n, elle prend cette forme (*v.* t. I, p. 490)

$$(k^2-ml)y^2-2(kk'+mn)xy+(k'^2-ml')x^2+$$
$$+2(k'l+kn)y+2(kl'+k'n)x+n^2-ll'=0,$$

l'axe des y étant une tangente, on a $l=0$; divisant toute l'équation par m^2, et faisant $\frac{k}{m}=t$, $\frac{k'}{m}=u$, et désignant $\frac{l'}{m}$ par λ et $\frac{n}{m}$ par n', l'équation générale prend cette forme :

$$t^2y^2-2(ut+n')xy+(u^2-\lambda)x^2+2tn'y+2(t\lambda+un')x+n'^2=0.$$

Posant $y=0$, on a les deux équations $t\lambda+un'=a(u^2-\lambda)$; $n'^2=b(u^2-\lambda)$, où a et b sont des quantités connues par les données de la question; d'où

$$\lambda=\frac{u(au-n')}{a+t},\quad u^2-\lambda=\frac{u(ut+n')}{a+t},\quad n'^2(a+t)=bu(ut+n'),$$

$$n'^2(a+t)+bun'=bu^2t,\quad n'=\frac{-bu\pm u\sqrt{b^2-4abt-4bt^2}}{2(a+t)},$$

remplaçant dans l'équation générale λ par sa valeur, il vient

$$\left.\begin{aligned}&(a+t)t^2y^2-2(a+t)(ut+n')xy+u(ut+n')x^2+\\&+2t(a+t)n'y+2au(ut+n')\lambda+n'^2(a+t)=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

équation dont tous les coefficients sont connus; la discussion des deux valeurs de n ne présente aucune difficulté.

IV. *Problème.* Étant donnés deux points d'une conique, une droite tangente, et le rapport des axes principaux, trouver le lieu du centre.

Solution. Conservons la même notation; le rapport des axes étant connu, on a l'équation (t. I, p. 495)

$$\begin{aligned}&[(a+t)t^2+u(ut+n')+2(a+t)(ut+n')\cos\nu]^2=\\&=4c(a+t)(ut+n')[aut+n'(a+t)],\end{aligned}$$

c est donnée; en mettant au lieu de n' sa valeur et faisant disparaître ensuite le radical, on parvient à une équation du douzième degré, qui est le lieu du centre.

V. *Problème.* Étant donnés, un point d'une conique, deux tangentes et le centre, trouver une équation de cette conique.

Solution. Prenons les deux tangentes pour axes coordonnés, et soient x', y' les coordonnées du point donné, t et u celles du centre, on a ici $l = l' = 0$; et l'équation générale devient (III)

$$t^2y^2 - 2(ut+n')xy + u^2x^2 + 2tn'y + 2un'x + n'^2 = 0, \text{ ou } n' = \frac{n}{m},$$

le point (x', y') étant sur la conique, on a donc, pour déterminer n', l'équation

$$n'^2 + 2n'[ty' - x'y' + ux'] = -(ty' - ux')^2,$$

et

$$n' = x'y' - ty' - ux' \pm \sqrt{x'y'(x'y' - 2y't - 2ux' + 4ut)}.$$

Observation. Si l'un des trois facteurs qui sont sous le radical devient nul, alors n' est rationnel, et il n'y a qu'une seule solution.

VI. *Théorème.* Le lieu géométrique du centre d'une conique touchant deux droites fixes, passant par un point donné, et semblable à une conique donnée, est du huitième degré.

Démonstration. La condition de similitude donne

$$[t^2 + u^2 + 2(ut + n')\cos\gamma]^2 = 4cn'(2ut + n') \quad \text{(t. I, p. 495)},$$

mettant à la place de n' sa valeur et faisant disparaître le radical, on obtient une ligne du huitième degré, qui se réduit au quatrième degré lorsque n' est rationnel.

VII. *Problème.* Étant donnés le centre d'une conique, et trois tangentes, trouver une équation de cette conique.

Solution. Prenons, deux de ces tangentes pour axes coordonnés, et soit $dy + ex + f = 0$, l'équation de la troisième tangente, on a donc $l = l' = 0$; la condition de tangence de la troisième droite est

$$-2den + mf^2 + 2fdk' + 2fek = 0 \quad \text{(t. II, p. 108)},$$

et divisant par m,

$$-2den'+f^2+2fdu'+2fet=0,\text{ d'où } n'=\frac{f^2+2fdu+2fet}{2de},$$

l'équation générale de la conique est donc (voir ci-dessus III),

$$t^2y^2-2(ut+n')xy+u^2x^2+2tn'y+2un'x+n'^2=0,$$

remplaçant n' par sa valeur, on obtient l'équation cherchée, l'espèce de la conique dépend de l'expression $n'(2ut+n')$.

VIII. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique touchant trois droites données et semblable à une conique donnée, est du quatrième degré.

Démonstration. La condition de similitude donne

$$[t^2+u^2+2(ut+n')\cos\gamma]^2=4cn'(2ut+n');$$

remplaçant n' par sa valeur (VII), on trouve une équation du quatrième degré sans asymptotes.

IX. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique passant par trois points donnés, et dont le rectangle des axes est donné, est une ligne du huitième degré.

Démonstration. Conservons la notation du problème I, la constance du rectangle des axes est exprimée par la relation $L^2=cm^3$; c est une constante (t. I, p. 493); rapportant L et m à l'équation (1), problème I, on a

$$L=AE^2-BDE+CD^2=ut(2t-p)(2u-q)$$
$$[(2pu+2qt-pq)(pu+qt-pq)-p^2q^2],$$
$$m=(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq).$$

Ainsi l'équation du lieu cherché est

$$u^2t^2[(2pu+2qt-pq)(pu+qt-pq)-p^2q^2]^2=$$
$$=c(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)^3,$$

ligne du huitième degré qui touche, aux points milieux, les côtés du triangle ABC.

X. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique qui passe par deux points fixes, et touche une droite, et dont le rectangle des axes est constant, peut atteindre le trentième degré.

Démonstration. Adoptons la même notation que pour le problème III ; rapportant L et m à l'équation (2), il vient

$$L=4(a+t)(ut+n')[Nn'+a^2ut^3], \quad N=at^3+t^2(2b+3a^2)+4abt+b^2,$$
$$m=4(a+t)(ut+n')[aut+n'(u+t)],$$

et faisant disparaître les n'^2 à l'aide de la relation

$$n'^2(a+b)=bu(ut+n'),$$

faisant $n'=\dfrac{-bu+R}{a+t}$, où R représente le radical qui entre dans la valeur de n', on verra qu'en faisant disparaître le radical, l'équation peut s'élever au trentième degré.

(*La suite prochainement.*)