NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. DE FÉRUSSAC

Note sur la résolution d'un système général de *m* équations du premier degré entre *m* inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 28-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__28_1>

NOTE

Sur la résolution d'un système général de m *équations du premier degré entre* m *inconnues.*

PAR M. H. DE FÉRUSSAC,
elève de M. VINCENT.

Je prends la notation adoptée dans la discussion des équations du premier degré. Dans cette notation la lettre qui servait à représenter les termes connus dans son système, sert dans le système suivant, de coefficient à la nouvelle inconnue introduite.

En passant d'un système à un autre, j'introduis une nouvelle inconnue et une nouvelle équation.

L'équation $ax=b$ donne $x=\frac{b}{a}=\frac{B}{A}$.

Le système $\left.\begin{matrix} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{matrix}\right\}$ résolu par le calcul, donne

$$(1) \qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{cb'-bc'}{Ab'-Ba'}=\frac{A_1}{D},$$

$$(2) \qquad y=\frac{ac'-ca'}{Ab'-Ba'}=\frac{B_1}{D}.$$

Le dénominateur de ces nouvelles valeurs s'obtient, comme on le voit, en multipliant le dénominateur de la valeur du système précédent par le coefficient de la nouvelle inconnue dans la dernière équation, et en retranchant le produit du numérateur de l'inconnue du premier système, par le coefficient correspondant à la même inconnue dans cette dernière équation.

Cette loi se vérifie de même pour un système des trois équations à trois inconnues. La dernière des équations est

$$a''x+b''y+c''z=d'',$$

et le dénominateur de la valeur de x, obtenu par le calcul, est

$$(ab'-ba')c''-(cb'-bc')a''-(ac'-ca')b'',$$

ou bien remontant aux valeurs (1) et (2),

$$Dc''-A_1a''-B_1b''.$$

En observant ce nouveau dénominateur, on voit qu'il se forme de celui du système précédent, suivant une certaine loi qui, généralement énoncée, est la suivante

Connaissant les valeurs des inconnues d'un système de n équations à n inconnues, pour avoir le dénominateur commun des valeurs d'un système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues, on multiplie le dénominateur des valeurs du premier système, par le coefficient de la nouvelle inconnue dans la nouvelle équation. Puis on en retranche les produits respectifs des numérateurs des n inconnues du premier système par leurs coefficients, dans la dernière du nouveau système. Quant au numérateur il se forme toujours du dénominateur en remplaçant le coefficient de l'inconnue que l'on considère par le terme tout connu.

C'est cette loi qu'il s'agit de démontrer. Soit un système de n équations à n inconnues, écrit avec la notation suivante :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + p_1u = q_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + p_2u = q_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + p_3u = q_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + p_nu = q_n \end{array}\right\}. \quad (1)$$

J'écris maintenant le système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \ldots + p_1u = r_1 - q_1t \\ a_2x + b_2y + c_2z \ldots + p_2u = r_2 - q_2t \\ a_3x + b_3y + c_3z \ldots + p_3u = r_3 - q_3t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz \ldots + p_nu = r_n - q_nt \\ a_{n+1}x + b^{n+1}y + c_{n+1}z \ldots + p_{n+1}u + q_{n+1}t = r_{n+1} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si la loi est vraie pour n équations, je dis qu'elle est vraie pour $(n+1)$ équations. Soient

$$\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}, \ldots \frac{P}{D},$$

les valeurs du système (1). Le dénominateur D est, d'après la loi de formation, indépendant des seconds membres des équations; les numérateurs A, B, C, etc., s'obtiennent en mettant à la place du coefficient des inconnues, les termes tout connus.

Je considère maintenant les n premières équations du système (2), et supposant les n seconds membres connus, je résous ce système ; il est clair que le dénominateur des valeurs que j'obtiendrai sera D, puisque comme je l'ai déjà observé, ce dénominateur est indépendant des termes tout connus, et que les premiers membres des deux systèmes sont identiques.

Pour avoir les numérateurs, celui de x par exemple, il me faudra dans A remplacer partout q_1, q_2, q_3, etc., par $r - q_1 t$, $r^2 - q_2 t$, $r^3 - q_3 t$, etc. Or, qu'arrivera-t-il? chaque terme de A m'en donnera deux : les premiers de la forme $A_1 r_n$ qui s'obtiendront en remplaçant dans tous les termes de A, les lettres q_1, q_2, etc., par r_1, r_2, r_3, etc. Puis, les autres de la forme $- A_1 q_n t$; et si dans ces derniers on met t en facteur commun, le résultat entre parenthèses ne sera autre chose que A dans lequel q_1, q_2, q_3, etc., au lieu de représenter les termes tout connus comme dans le premier système, représenteront les coefficients de la nouvelle inconnue. Pour indiquer que la somme des premiers termes est A dans lequel on a remplacé q, q_1, q_2, par r_1, r_2, r_3, etc., je représente cette somme par Ar_1, et le numérateur de n dans le second système sera $Ar_1 - At$. Les valeurs des inconnues seront donc de la forme :

$$x = \frac{Ar_1 - At}{D}, \quad y = \frac{Br_1 - Bt}{D}, \quad z = \frac{Cr_1 - Ct}{D}, \ldots \quad u = \frac{Pr_1 - Pt}{D};$$

substituant dans la $(n+1)^{ième}$ équation du système (2), et chassant les dénominateurs il vient :

$$t\,(q_{n+1}D - a_{n+1}A - b_{n+1}B - c_{n+1}C - \ldots - p_{n+1}P) =$$
$$= r_{n+1}D - a_{n+1}Ar_1 - b_{n+1}\,Br_1 - c_{n+1}Cr_1 - \ldots - p_{n+1}Pr_1.$$

Le dénominateur de t sera la quantité comprise entre parenthèses. Elle est formée d'après la loi énoncée, car D est le dénominateur des valeurs du système précédent; A, B. C, en sont les numérateurs, et entrent bien dans le dénominateur de t suivant la règle.

La loi ayant été vérifiée pour un système de trois équations est donc générale.

En examinant le numérateur de t, je vois que le terme $r_{n+1}D$ se forme de $q_{n+1}D$, en remplaçant q_{n+1} coefficient de t par le terme tout connu $r_n{}^{+1}$; de même le terme $a_{n+1}Ar$ se forme de $A_{n+1}A$, par la même méthode.

Car, ainsi que je l'ai observé, Ar se forme de A en remplaçant partout q_1, q_2, etc., par les termes tout connus r_1, r_2.

De même pour tous les autres termes, donc enfin la loi énoncée est vraie.

Observation. Dans cette loi, pour avoir les valeurs d'un système, il faut avoir les valeurs des inconnues du système précédent. Cet inconvénient est en partie commun avec la loi de *Crammer*. Car dans cette loi, pour former un denominateur, il faut nécessairement connaître le dénominateur des valeurs du système précédent; je n'ai donc que les numérateurs en plus à obtenir. Or ils s'obtiennent par une simple écriture, sans operations à effectuer.

Ce léger inconvénient est racheté par une loi qui s'énonce plus facilement que la loi de Crammer, et dans laquelle il n'y a pas besoin d'avoir égard aux signes, non plus qu'aux accents et au rang des termes; d'un autre côté les multiplications indiquées sont toutes d'une simplicite extrême, puisque le multiplicateur ne contient qu'une lettre. Enfin, les termes obtenus ne peuvent pas se réduire entre eux, comme il est facile de le voir