Nouvelles annales de mathématiques

Ossian Bonnet

Note sur la nature des racines d'une équation trinôme quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 293-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__293_0>

NOTE

Sur la nature des racines d'une équation trinôme quelconque.

PAR M. OSSIAN BONNET,
répétiteur à l'École polytechnique (*).

On sait que l'on appelle équation trinôme, toute équation telle que

$$x^m + px^n + q = 0.$$

En explicitant toutes les formes qui peuvent se présenter eu égard aux degrés de parité des exposants m et n, et aux signes de p et de q, on aura les seize types suivants :

$$\begin{array}{llll}
(1) & x^{2m} + px^{2n} + q = 0, & (2) & x^{2m} + px^{2n} - q = 0, \\
(3) & x^{2m} - px^{2n} + q = 0, & (4) & x^{2m} - px^{2n} - q = 0, \\
(5) & x^{2m} + px^{2n+1} + q = 0, & (6) & x^{2m} + px^{2n+1} - q = 0, \\
(7) & x^{2m} - px^{2n+1} + q = 0, & (8) & x^{2m} - px^{2n+1} - q = 0, \\
(9) & x^{2m+1} + px^{2n} + q = 0, & (10) & x^{2m+1} + px^{2n} - q = 0, \\
(11) & x^{2m+1} - px^{2n} + q = 0, & (12) & x^{2m+1} - px^{2n} - q = 0, \\
(13) & x^{2m+1} + px^{2n+1} + q = 0, & (14) & x^{2m+1} + px^{2n+1} - q = 0, \\
(15) & x^{2m+1} - px^{2n+1} + q = 0, & (16) & x^{2m+1} - px^{2n+1} - q = 0.
\end{array}$$

Or l'équation (1) n'a aucune racine réelle, les équations (2), (4), (6), (8), ont une racine réelle positive et une racine réelle négative, les équations (9) et (13), zéro racine positive et une racine négative, enfin les équations (12) et (14), une racine positive et zéro négative; on peut donc se borner à considérer les équations (3), (5), (7), (10), (11),

---

(*) V. t. II, p. 321. Tm.

(15), (16); d'un autre côté, l'équation (3) a autant de racines négatives que de racines positives, l'équation (5) n'a pas de racines positives, et a autant de racines négatives que l'équation (7) en a de positives; l'équation (7) n'a pas de racines négatives, l'équation (10) a une racine positive, et autant de négatives que l'équation (11) en a de positives; l'équation (11) a une racine négative, l'équation (15) une racine négative, enfin l'équation (15) a une racine positive et autant de racines négatives que l'équation (15) a de racines positives. Tout se réduit donc en définitive, à savoir déterminer le nombre des racines positives des équations (3) (7), (11), (15), ou en général de l'équation

$$x^m - px^n + q = 0.$$

Ce nombre est zéro ou 2, d'après le théorème de Descartes; pour qu'il soit 2, il faut et il suffit qu'une certaine valeur réelle de x rende

$$x^m - px^n + q < 0, \quad \text{ou} \quad q < x^n (p - x^{m-n}).$$

Or, pour que cette inégalité subsiste pour une certaine valeur de x, il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour la valeur de x qui rend $x^n (p - x^{m-n})$ maximum, valeur qui doit vérifier l'égalité connue

$$\frac{m-n}{n} x^{m-n} = p - x^{m-n},$$

d'où l'on tire.

$$x = \left(\frac{n}{m} p\right)^{\frac{1}{m-n}};$$

portant dans l'inégalité ci-dessus, on trouve pour la condition qui exprime que l'équation a deux racines réelles positives:

$$q < \frac{m-n}{n} \left(\frac{n}{m} p\right)^{\frac{m}{m-n}},$$

ou

$$\left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} < \left(\frac{n}{m}p\right)^{m},$$

l'inégalité n'excluant pas l'égalité.

La condition pour que l'équation n'ait pas de racines positives est au contraire :

$$\left(\frac{nq}{m-n}\right)^{m-n} > \left(\frac{n}{m}p\right)^{m}.$$

Euler dans son calcul différentiel est arrivé aux mêmes résultats en se basant sur le théorème de Rolle. (*Caput* XII, § 310.)