Nouvelles annales de mathématiques

Finck

Sur la décomposition des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 295-298
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__295_1>

SUR LA

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

PAR M. FINCK,
professeur à Strasbourg.

Cette question faisant partie du programme d'admission à l'École Polytechnique, il ne sera pas hors de propos d'indiquer la méthode que j'emploie à mon cours d'analyse infinitésimale.

I. Soit $\frac{fx}{\mathrm{F}x}$ la fraction, fx étant de degré moindre que $\mathrm{F}x$, et premier avec lui : soit $x-a$ un facteur simple de $\mathrm{F}x=(x-a)\varphi x$. Je pose $x=a+z$, et j'ai :

$$\frac{fx}{\mathrm{F}x}=\frac{f(a+z)}{z\varphi(a+z)}=\frac{fa+zf'a+\frac{z^2}{2}f''a+\ldots}{z\left[\varphi a+z\varphi' a+\frac{z^2}{2}\varphi'' a+\ldots\right]}.$$

Divisant $fa + zf'a + \ldots$ par $\varphi a + z\varphi' a + \ldots$ les termes restant dans l'ordre où ils se trouvent, on a pour premier terme du quotient $\frac{fa}{\varphi a}$ et un reste qui n'est autre chose que $\frac{\varphi a.f(a+z) - fa.\varphi(a+z)}{\varphi a}$, ayant pour facteur z : donc

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fa}{\varphi a.z} + \frac{\varphi af(a+z) - fa\varphi(a+z)}{z\varphi a.\varphi(a+z)}.$$

On prouve comme à l'ordinaire que $\varphi a = F'a$; donc nous avons une première fraction partielle $\frac{fa}{F'a} \cdot \frac{1}{z} = \frac{fa}{F'a} \cdot \frac{1}{x-a}$. Le reste, encore comme à l'ordinaire, en tant qu'il s'agit de facteurs simples de Fx.

II. Passons aux facteurs multiples, et soit $Fx = (x-a)^n.\varphi x$, je pose encore $x = a + z$, et j'ai :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fa + zf'a + \ldots}{z^n[\varphi a + z\varphi' a + \ldots]}.$$

Or on n'a qu'à diviser encore $fa + z'fa + \ldots$, par $\varphi a + z\varphi' a + \ldots$ et s'arrêter au terme en z^{n-1}, au quotient, ce quotient sera de la forme $A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + \ldots + A_{n-1} z^{n-1}$. Quant au reste, si Fx est de degré m, fx de degré $m-2$, dans notre division le diviseur $\varphi(a+z)$ est du degré $m-n$, le dividende du degré $m-2$, le quotient du degré $n-1$, le reste sera donc au plus du degré $m-1$; soit Rz^n. Ce reste qui renferme évidemment z^n pour facteur, de sorte que R est du degré $m-n-1$; on aura.

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A_1 + A_2 z + \ldots + A_{n-1} z^{n-1}}{z^n} + \frac{R}{\varphi(a+z)}$$

$$= \frac{A_1}{z^n} + \frac{A_2}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z} + \frac{R}{\varphi(a+z)},$$

et de la fraction proposée, nous avons extrait les n fractions partielles $\frac{A_1}{(x-a)^n}, \ldots \frac{A_{n-1}}{x-a}$, plus la fraction $\frac{R}{\varphi x}$, dont le numérateur est du degré $m - n - 1$, et le dénominateur est du degré $m - n$; elle est donc de même nature que la proposée.

III. Pour montrer que cette méthode est éminemment pratique, je prends

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{3x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 15x + 5}{(x-1)^3 (x+1)^2 (x-2)},$$

je pose $x = 1 + z$, et je trouve :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{-4 - 8z - z^2 + z^3 + 3z^4}{z^3 (z+2)^2 (z-1)}.$$

Je divise le numérateur par $(z+2)^2 (z-1) = -4 + 3z^2 + z^3$, voici l'opération, poussée jusqu'au terme en z^2 au quotient :

	$-4 - 8z - z^2 + z^3 + 3z^4$	$-4 + 3z^2 + z^3$
1er reste	$-8z - 4z^2 + 3z^4$	$1 + 2z + z^2$
2e reste	$-4z^2 - 6z^3 + z^4$	
3e reste	$-6z^3 - 2z^4 - z^5$	

Donc

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{1 + 2z + z^2}{z^3} - \frac{6z^3 + 2z^4 + z^5}{z^3 (z+2)^2 (z-1)}$$
$$= \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z} - \frac{6 + 2z + z^2}{(z+2)^2 (z-1)}.$$

Actuellement au lieu de revenir à $\frac{fx}{Fx}$, pour en extraire les autres fractions, il est plus simple d'opérer sur $\frac{6 + 2z + z^2}{(z+2)^2 (z-1)} = \frac{f_1 z}{\varphi_1 z}$, j'y pose $z + 2 = y$, et j'ai $\frac{f_1 (y-2)}{\varphi_1 (y-2)} = \frac{6 - 2y + y^2}{y^2 (y-3)}$; je divise le numérateur par $-3 + y$,

	$6 - 2y + y^2$	$-3 + y$
1er reste	$0y + y^2$	$-2 + 0y$
2e reste	y^2,	

donc

$$\frac{f_1}{\varphi_1}=-\frac{2}{y^2}+\frac{y^2}{y^2(y-3)}=-\frac{2}{y^2}+\frac{4}{y-3},$$

et

$$\frac{fx}{\mathrm{F}x}=\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y-3}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-2}.$$

On pourrait, de la division seule, déduire une formule générale pour le numérateur de $(x-a)^{n-\alpha}$; mais dans chaque cas, la division est préférable.

Note. L'intégration des fractions algébriques rationnelles par la décomposition en fractions partielles est due à Jean Bernoulli (Voy. *Op. omnia*, t. I, p. 393), mais la méthode généralement adoptée pour obtenir les coefficients à l'aide de dérivations est d'Euler. Le procédé par *la division* a été proposé par divers, entre autres par un anonyme, dans le journal de Gergonne, t. X, p. 255, et par le professeur Dirksen, journal de Crelle, t. I, p. 53 ; on possède aussi des procédés combinatoires. (*Voir* Cauchy, cours d'Analyse, ch. XI, p. 365). Tm.