NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DELADÉRÉERE

Solution du problème proposé pour la composition du concours d'agrégation en 1843

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 313-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__313_0>

SOLUTION DU PROBLÈME

proposé pour la composition du concours d'agrégation en 1843.

PAR M. A. DELADEREERE,
Professeur au collége de Nantes, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

Trouver l'équation des surfaces telles que si, par un point donné, on mène une perpendiculaire au plan tangent, le rectangle construit sur cette perpendiculaire et sur la portion de la normale comprise entre le point de contact et un plan fixe mené par le point donné, soit équivalent au carré de la distance du point donné au point de contact.

Solution. Je prends le point fixe pour origine des coordonnées, et le plan fixe pour celui des XY, et comme les équations du plan tangent et de la normale sont :

$$(1) \qquad z'-z=p(x'-x)+q(y'-y),$$

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} x'-x=-p(z'-z), \\ y'-y=-q(z'-z), \end{array}\right.$$

les équations de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent seront :

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} x'=-pz', \\ y'=-qz'. \end{array}\right.$$

Le carré de la distance de l'origine au plan tangent sera d'après les formules connues :

$$(4) \qquad \delta^2=\frac{(z-px-qy)^2}{1+p^2+q^2}.$$

Le carré de la portion de la normale comprise entre le point de contact et le plan des XY sera :

$$(5) \qquad \delta'^2=(1+p^2+q^2)z^2$$

et le carré de la distance de l'origine au point de contact sera :

$$(6) \qquad \delta''^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Mais, d'après les conditions du problème, on doit avoir :

$$(7) \qquad \delta\delta' = \delta''^2 \quad \text{ou bien} \quad \delta^2\delta'^2 = \delta''^4.$$

Substituant dans (7) pour δ^2, δ'^2, δ''^2 leurs valeurs (4), (5) et (6), on aura :

$$\frac{(z - px - qy)^2}{1 + p^2 + q^2}(1 + p^2 + q^2)z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

ou bien en simplifiant :

$$(z - px - qy)^2 z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Extrayant la racine carrée des deux membres on trouve :

$$(z - px - qy)z = \pm(x^2 + y^2 + z^2);$$

on en tire :

$$px + qy = z \pm \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z};$$

et en réduisant les termes du deuxième membre au même dénominateur :

$$px + qy = \frac{z^2 \pm (z^2 + y^2 + x^2)}{z},$$

équation linéaire aux différences partielles et du premier ordre, qui se partage dans les deux suivantes :

$$(8) \qquad px + qy = -\frac{x^2 + y^2}{z},$$

$$(9) \qquad px + qy = \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{z}.$$

Telles sont les deux équations aux différences partielles qu'il faudra intégrer pour avoir toutes les solutions de la question.

Or nous savons, par la théorie des équations aux différences partielles linéaires et du premier ordre, que pour intégrer $\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}$, il faut poser $\frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{dz}{\mathrm{R}}$, ce qui donne trois équations simultanées dont l'une est une conséquence des deux autres ; qu'on intègre ensuite les deux plus simples, ce qui donne deux intégrales avec deux constantes arbitraires ; qu'on regarde ensuite une de ces constantes comme une fonction arbitraire de l'autre, remplaçant ensuite dans le résultat les constantes par leurs valeurs en fonctions des variables déduites des équations intégrales.

Nous allons donc appliquer ce procédé aux équations (8) et (9)

Soit d'abord l'équation (8) :

$$(8) \qquad px + qy = -\frac{x^2 + y^2}{z}.$$

D'après la méthode nous poserons :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{zdz}{x^2 + y^2}$$

Intégrant la première,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

on a

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}cx,$$

d'où

$$(10) \qquad y = cx.$$

Intégrons actuellement la deuxième

$$\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{x^2 + y^2},$$

après avoir mis pour y sa valeur précédente, ce qui donne

$$\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{(1 + c^2)x^2},$$

d'où on tire :

$$(1 + c^2)\, xdx = -zdz.$$

Intégrant

$$(1+c^2)x^2 = -z^2 + C',$$

ou bien

$$x^2 + c^2x^2 + z^2 = C' ;$$

et d'après la valeur $y = cx$,

$$(11) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = C'.$$

Posant $C' = \varphi(c)$ d'après la théorie, et remplaçant c et C' par leurs valeurs tirées des équations (10) et (11), il viendra

$$(12) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Telle est l'équation de la première famille de surfaces satisfaisant à l'énoncé de la question.

Intégrons actuellement la deuxième équation différentielle :

$$(9) \qquad px + qy = \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{z},$$

et d'après la méthode, posons

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + y^2 + x^2}.$$

Intégrons la première des deux équations contenues dans celle-ci :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Nous avons trouvé tout à l'heure pour son intégrale

$$(10) \qquad y = cx.$$

Intégrons la deuxième

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{2z^2 + y^2 + x^2},$$

après y avoir mis pour y sa valeur, ce qui donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{2z^2 + (1+c^2)x^2},$$

d'où on tire :

$$2z^2dx + (1 + c^2)x^2dx = zxdz.$$

Pour l'intégrer, je pose $z^2 = t$, d'où $zdz = tdt$. Substituant j'ai :

$$2tdx + (1 + c^2)x^2dx = \frac{1}{2}xdt,$$

d'où on tire :

$$dt - \frac{4}{x}tdx = 2(1 + c)xdx,$$

ce qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec un deuxième membre ; or on sait que l'intégrale de toute équation de la forme :

$$dy + Pydx = Qdx$$

est

$$y = e^{-\int Pdx}\left\{\int_0^x e^{-\int Pdx}Qdx + C\right\}.$$

Appliquant à l'équation différentielle précédente, on a :

$$t = z^2 = e^{\int \frac{4}{x}dx}\left\{\int_0^x e^{-\int \frac{4}{x}dx} 2(1 + c^2)xdx + C'\right\};$$

ou bien en remarquant que l'on a par l'intégration :

$$e^{\int \frac{}{x}dx} = e^{4Lx} = \left(e^{Lx}\right)^4 = x^4,$$

l'intégrale précédente devient :

$$z^2 = x^4\left\{\int_0^x 2(1 + c^2)x^{-3}dx + C'\right\}.$$

Intégrant une seconde fois, il vient :

$$z^2 = x^4\left\{-\frac{(1 + c^2)}{x^2} + C'\right\},$$

ou bien

$$z^2 = -(1 + c^2)x^2 + C'x^4,$$

ou encore :

$$z^2 + c^2x^2 + x^2 = c'x^4.$$

Remplaçant cx par sa valeur y,

$$(13) \qquad z^2 + y^2 + x^2 = x^4 C'.$$

Posant $C' = \varphi(c)$ et remplaçant C et C' par leurs valeurs (10) et (12), on a

$$(14) \qquad z^2 + y^2 + x^2 = x^4 \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Telle est l'équation de la deuxième famille de surfaces qui répondent à la question.

On voit facilement que puisque $c = \frac{y}{x}$, on pourrait la mettre sous la forme :

$$z^2 + y^2 + x^2 = y^4 \varphi_1 \left(\frac{x}{y}\right), \quad \text{ayant} \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = c^4 \varphi_1 \left(\frac{x}{y}\right)$$

Cherchons actuellement le mode de génération le plus simple des deux familles de surfaces représentées par les équations

Et commençons d'abord par l'équation

$$(12) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Posons $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $y = ax$ et $b = \varphi(a)$, et l'equation (12) représentera la surface engendrée par le grand cercle d'intersection d'une sphère ayant son centre à l'origine et pour rayon $\sqrt{b}$ avec un plan passant par l'axe des z et dont la trace sur le plan des XY aurait pour équation $y = ax$: ce grand cercle s'appuyant dans chacune de ses positions sur une certaine courbe directrice dont les équations serviraient dans chaque cas particulier à déterminer la forme de la fonction φ en éliminant x, y, z entre les équations de cette courbe et celles de la sphère et du plan en question, puis qu'on obtiendrait ainsi une relation déterminée entre a et b. Ainsi les surfaces de la famille représentée par l'équation (12) peuvent être considérées comme étant engendrées par un cercle variable de rayon, ayant son centre fixe, tournant autour d'un axe passant par ce centre, et s'appuyant constamment sur une courbe donnée.

Si dans l'équation (14) précédente,

$$(14) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = x^4 \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

on pose $x^2 + y^2 + z^2 = bx^4$, $y = ax$, on arrivera par un raisonnement semblable à conclure que :

Les surfaces de la famille représentée par l'équation (14) peuvent être engendrées par une courbe plane du quatrième degré, dont le centre est fixe, et qui tourne autour d'une droite passant par ce centre, et s'appuyant constamment sur une courbe donnée.

La courbe du quatrième degré, qui sert de génératrice, a une équation de la forme

$$(15) \qquad x^2 + z^2 = cx^4.$$

On en tire pour la valeur de z en x :

$$(16) \quad z = \pm x\sqrt{c^2x^2 - 1} = \pm x\sqrt{(cx+1)(cx-1)}.$$

D'après l'équation (15) on voit qu'elle a son centre à l'origine ; ensuite l'équation (16) montre que son centre est un point isolé de la courbe, puisque pour $x = 0$, $z = 0$ et que pour x compris entre $\frac{1}{c}$ et $-\frac{1}{c}$ les valeurs de z sont imaginaires. On voit aussi que les sommets sont donnés par $x = \frac{1}{c}$ et $x = -\frac{1}{c}$, de façon que la courbe a un axe dont la grandeur est $\frac{2}{c} = 2m$, et l'équation de la courbe a la forme

$$(17) \qquad m^2(x^2 + z^2) = x^4,$$

ou bien :

$$(18) \qquad z = \frac{x}{m}\sqrt{x^2 - m^2}.$$

Le coefficient angulaire de la courbe a la forme

$$(19) \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{2x^2 - m^2}{m\sqrt{x^2 - m^2}},$$

et le coefficient différentiel de celui-ci est :

$$(20) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x(2x^2 - 3m^2)}{m(x^2 - m^2)\sqrt{x^2 - m^2}}.$$

Pour $x = m$, (19) devient infini, ce qui montre que la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.

Pour $x = \infty$, (19) devient encore infini, ce qui montre que la dernière direction des branches de la courbe est perpendiculaire à l'axe; d'ailleurs, comme pour des valeurs croissantes de x depuis m jusqu'à l'infini, z prend des valeurs croissantes depuis zéro jusqu'à l'infini, ainsi que l'indique (18), on en conclut que la courbe a des branches infinies dont la dernière direction à une distance infinie de l'axe des X est perpendiculaire à l'axe, ce qui montre que la courbe n'a pas d'asymptotes.

De ce que pour $x = m$ et $x = \infty$ les tangentes sont perpendiculaires à l'axe, on en conclut qu'entre ces deux points il y a une inflexion ; pour la déterminer il faut égaler (20) à zéro, ce qui ne peut se faire pour des valeurs finies de x qu'en égalant le numérateur à zéro :

$$x(2x^2 - 3m^2) = 0.$$

Or $x = 0$ donne l'origine ou point isolé ou conjugué, le point d'inflexion est donc donné par

$$2x^2 - 3m^2 = 0 ;$$

d'où

$$x\sqrt{2} = m\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{2} \quad z = \frac{1}{2}m\sqrt{3}.$$

Donc x est le côté du carré dont la diagonale serait le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon égal à m.

Il sera d'ailleurs facile de construire géométriquement autant de points qu'on voudra de la courbe en prenant une quatrième proportionnelle au demi-axe, l'abscisse et le côté du triangle rectangle dont l'hypothénuse est l'abscisse et l'autre côté de l'angle droit le demi-axe, ce qu'indique l'équation (18). On trouvera ainsi que la courbe a à peu près la forme suivante (*fig.* 35).

L'espèce de surface donnée par l'une des équations (12) ou (14) variera selon la forme de la directrice. On pourra d'ailleurs prendre pour celle-ci la trace que la surface laisse sur le plan des XY.

En coupant ces surfaces par des plans parallèles au plan des XY, on aura des courbes de formes très-variées.

Dans le cas particulier où la directrice de la surface représentée par l'équation (12) est un cercle, la surface devient une sphère sur laquelle la propriété se vérifie immédiatement, vu que les trois longueurs se confondent avec le rayon (14).

En éliminant la fonction arbitraire φ à l'aide de la méthode connue d'élimination des fonctions arbitraires, l'équation (12) donnera l'équation (8) et l'équation (14) donnera l'équation (9) ; ce qui doit être.

L'équation (14), dans le cas où la directrice est un cercle, donne une surface de révolution autour de l'axe des z, qui n'a qu'une nappe d'après la forme de la génératrice, et l'équation de la surface devient :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{r^2},$$

r représentant le rayon du cercle.

Dans ce cas, les trois distances δ, δ', δ'' sont dans la section méridienne, et l'on vérifie alors facilement que la condition (7) est remplie pour la courbe représentée par l'équation (18) en remplaçant le plan tangent à la surface par sa trace sur le plan méridien qui devient la tangente à la courbe.

On conclut facilement de ce que la condition (7) est vérifiée pour le cercle et la courbe représentée par l'équation (18), qu'elle est vérifiée pour les deux familles de surfaces précédemment indiquées; car

CT (*fig.* 34) étant la tangente à la courbe; $OC = \delta''_1$; $OP_1 = \delta_1$; $CN_1 = \delta'_1$, je dis que si on a $\delta''^2_1 = \delta_1\delta'_1$, la même formule aura lieu pour un plan quelconque mené par la tangente CT. En effet, soit TAB ce plan; $OP = \delta$ la perpendiculaire à ce plan, et CN la partie de normale terminée au plan XY; l'angle POP_1 sera égal à l'angle NCN_1, puisque tous deux représentent les angles θ qu'une perpendiculaire au plan POP_1 fait avec ZOX. D'ailleurs angle $OPP_1 = 90°$, de même angle $CN_1N = 90°$; donc $\delta = \delta_1 \cos\theta$, $\delta' = \dfrac{\delta'_1}{\cos\theta}$ et $\delta\delta' = \delta_1\delta'_1 = \delta''^2$. Ce qu'il fallait prouver.