TERQUEM

Théorèmes et problèmes. Sur les foyers et centres des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 322-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__322_1>

THÉORÈMES ET PROBLEMES

Sur les foyers et centres des coniques (*).

(V. p. 304.

XIX. *Problème.* Connaissant trois points et le foyer d'une conique à centre, trouver une équation de cette courbe, et les coordonnées du centre.

Solution Soient A, B, C, F les trois points et le foyer

(*) A la fin de cet article, on donnera les solutions géometriques de Newton donnés ; prenons ce foyer pour origine et les axes rectangulaires ; soient y', x' ; y'', x'' ; y''', x''' les coordonnées des points A, B, C ; l'équation cherchée est

$$(y^2+x^2)(k^2+k'^2-ml)=(k'y+kx-l)^2, \quad \text{(v. t. II, p. 427)},$$

à laquelle on peut donner la forme $y^2+x^2=(My+Nx+P)^2$; faisons $y'^2+x'^2=r'^2$, $y''^2+x''^2=r''^2$, $y'''^2+x'''^2=r'''^2$; on obtient ces trois équations

$$\begin{aligned} My'+Nx'+P&=r', \\ My''+Nx''+P&=r'', \\ My'''+Nx'''+P&=r''', \end{aligned}$$

nous supprimons le double signe de r qu'il faut toujours supposer. Les formules de Cramer donneront

$$P=\frac{r'[y''x'''-x''y''']+r''[y'''x'-x'''y']+r'''[y'x''-x'y'']}{Q},$$

$$N=\frac{r'[y'''-y'']+r''[y'-y''']+r'''[y''-y']}{Q},$$

$$M=\frac{r'[x''-x''']+r''[x'''-x']+r'''[x'-x'']}{Q},$$

$$Q=y'x''-y'x'''-y''x'+y''x'''+y'''x'-y'''x''.$$

Observation. 1° $y'x''-x'y''$, est le double de l'aire du triangle FAB, etc. ; Q est le double de l'aire du triangle ABC de sorte qu'on a $P=\dfrac{r.\text{FBC}+r'.\text{FAC}+r''.\text{FAB}}{\text{ABC}}$, quantité facile à construire, ainsi que M et N.

Observation. 2° L'équation de la courbe est

$$y^2(1-M^2)-2MNxy+x^2(1-N^2)-2PMy-2PNx-P^2=0. \quad (1)$$

Les fonctions élémentaires de la courbe sont (t. I, p. 489)

$$\begin{aligned} m&=4(M^2+N^2-1), \\ k&=-4PN, \end{aligned}$$

$$k' = -4PM,$$
$$l = 4P^2 = l',$$
$$n = 0,$$
$$L = 4P^2.$$

Ainsi pour que la courbe soit une ellipse, il faut que l'on ait $M < 1 > N$; pour l'hyperbole $M^2 + N^2 > 1$; pour la parabole $M^2 + N^2 = 1$.

Observation. 3° Passons aux coordonnées polaires, soit

$$x' = r'\cos\varphi',\ y' = r'\sin\varphi',\ x'' = r''\cos\varphi'',\ y'' = r''\sin\varphi'',$$
$$x''' = r'''\cos\varphi''',\ y''' = r'''\sin\varphi''',$$

il vient

$$PQ = r'r''r'''[\sin(\varphi''-\varphi''') + \sin(\varphi'''-\varphi') + \sin(\varphi'-\varphi'')],$$
$$Q = r'r''\sin(\varphi'-\varphi'') + r'r'''\sin(\varphi'''-\varphi') + r''r'''\sin(\varphi''-\varphi'''),$$
$$MQ = r'\cos\varphi'[r'''-r''] + r''\cos\varphi''[r'-r'''] + r'''\cos\varphi'''[r''-r'],$$
$$NQ = r'\sin\varphi'[r''-r'''] + r''\sin\varphi''[r'''-r'] + r'''\sin\varphi'''[r'-r''].$$

Si l'on prend la droite r' pour axe des x, alors $\varphi' = 0$; et les valeurs de M, N, P, Q sont entièrement déterminées par les côtés et les diagonales, les angles, et l'aire du quadrilatère FABC.

Observation. 4° L'ordonnée à l'origine est $\frac{-P}{M \pm 1}$, l'équation de la directrice est $My + Nx + P = 0$, la distance de l'extrémité de l'ordonnée à l'origine, à la directrice est $\frac{-P}{(M\pm 1)\sqrt{M^2+N^2}}$, donc $\sqrt{M^2+N^2} = \frac{c}{a}$; c est l'excentricité et a le $\frac{1}{2}$ axe focal; la distance du foyer à la directrice est $\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2}}$, donc $\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2}} = \frac{a^2}{c}$; de là $P = a$; $c = P\sqrt{M^2+N^2}$, $\frac{b}{a} = \sqrt{1-M^2-N^2}$, $b = \frac{1}{2}$ petit axe.

(*Voir* Roguet, t. 1, p. 137).

$$a = \frac{\sin(\varphi'' - \varphi''') + \sin(\varphi''' - \varphi') + \sin(\varphi' - \varphi'')}{\frac{\sin\varphi'' - \varphi'''}{r'} + \frac{\sin(\varphi''' - \varphi')}{r''} + \frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{r'''}}.$$

Observation. 5° Ce problème est très-important en Astronomie. Connaissant trois observations d'une planète, rapportée au plan de son orbite, on peut déterminer les éléments géométriques de l'orbite. (*Voir* Lenthéric, *Ann. de Gergonne*, t. XVII, p. 366)

XX. *Problème.* Connaissant quatre points d'une conique, trouver le lieu des foyers.

Solution. Adoptons les mêmes données et les mêmes notations qu'au problème I (p. 260); et supposons qu'il s'agisse de l'équation d'une conique passant par trois points, et dont le centre a pour coordonnés t, u; l'equation (1) (p. 261), sera celle de la courbe.

Calculons les éléments de cette courbe; on aura

$$\begin{aligned}
&m = (2u - q)(2t - p)(pq - 2pu - 2qt),\\
&k = mt,\ k' = mu,\ l = q^2t^2(2t - p)^2,\ l' = p^2u^2(2u - q)^2,\\
&n = pqtu(2t - p)(2u - q),\\
&\mathrm{L} = tu(2t - p)(2u - q)(pq - 2pu - 2qt)(pq - pu - qt),\\
&\mathrm{N} = t(2t - p) + u(2u - q) - (2t - p)(2u - q)\cos\gamma;
\end{aligned}$$

désignant par α et β les coordonnées du foyer, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&2(\mathrm{A} - \mathrm{C})(\alpha - t)(\beta - u) + (\alpha - t)^2[\mathrm{B} - 2\mathrm{C}\cos\gamma] +\\
&\quad + (\beta - u)^2(2\mathrm{A}\cos\gamma - \mathrm{B}) = 0 \ \text{(t. II, p. 429)},
\end{aligned}\right\}\ (1)$$

$$m^2[(\beta - u)^2\cos\gamma + (\alpha - t)(\beta - u)] = 2\mathrm{L}(2\mathrm{C}\cos\gamma - \mathrm{B}),\ (2)$$

$$\mathrm{A} = t(2t - p),\ \mathrm{B} = -(2u - q)(2t - p),\ \mathrm{C} = u(2u - q).$$

Mais la conique devant passer par un quatrième point, ayant pour coordonné x', y', on a encore entre u et t, cette équation

$$\left.\begin{aligned}
&t(2t - p)y'^2 - (2u - q)(2t - p)x'y' + u(2u - q)x'^2 -\\
&\quad - qt(2t - p)y' - pu(2u - q)x' = 0.
\end{aligned}\right\}\ (3)$$

L'équation (1) est du quatrième degré, l'équation (2) est du huitième degré, et l'équation (3) du deuxième degré en u et t; éliminant u et t entre ces équations, on parvient à une équation entre α et β, qui peut monter au soixante-quatrième degréet ce qui n'a rien de surprenant; car chaque conique ayant quatre foyers analytiques (t. II, p. 429), l'équation finale peut renfermer des facteurs de degré pair réel, correspondant aux foyers imaginaires; circonstance qui rend toujours compliquées les solutions analytiques, ou il s'agit de déterminer des foyers; tandis que le centre, point unique, donne des solutions simples; il en est de même pour le foyer dans la parabole, ainsi que nous le verrons plus loin.

XXI. *Problème.* Connaissant deux points d'une conique, une tangente et un foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient x', y'; x'', y'', les coordonnées rectangulaires des deux points, et le foyer à l'origine; et soit $dy+ex+f=0$, l'équation de la tangente, même notation que pour le problème (XIX): on a ces trois équations

$$My'+Nx'+P=r',$$
$$My''+Nx''+P=r'',$$
$$P^2(d^2+e^2)-2P(dM+eN)+f^2(M^2+N^2-1)=0 \text{ (t. II, p. 108)}.$$

Éliminant M et N entre ces trois équations, on arrive à une équation du second degré en P; il y a donc telles données qui peuvent rendre le problème impossible.

XXII. *Problème.* Connaissant trois points d'une conique, et une tangente, trouver le lieu des foyers

Solution. Même notation qu'au problème XX, et soit de plus $dy+ex+f=0$ l'équation de la tangente, nous avons encore les mêmes équations (1) et (2); mais l'équation (3) sera remplacée par celle ci:

$$l'd^2-2den+le^2+mf^2+2f(dk'+ek)=0 \text{ (t. II, p. 108)}.$$

Cette équation est du quatrième degré en u et t ; donc l'élimination des deux variables u est entre les trois variables peut donner une équation entre α et β du 128^e degré.

XXIII. *Problème.* Connaissant un point d'une conique, une tangente avec le point de contact et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soit x', y' les coordonnées rectangulaires du point ; $d(y-y'')+e(x-x'')=0$, l'équation de la tangente y'' et x'' sont les coordonnées du point de contact ; l'origine est au foyer ; on a les mêmes équations que pour le problème XXI ; dans la dernière équation, il faut remplacer f par $-dy''-ex''$.

XXIV. *Problème.* Connaissant deux points d'une conique, une tangente avec le point de contact, trouver le lieu des foyers.

Solution. La même que pour le problème XXII, il faut remplacer f par $-dy''-ex''$.

XXV. *Problème.* Connaissant un point d'une conique, deux tangentes et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient $dy+ex+f=0$, $d'y+e'x+f'=0$, les équations des tangentes ; axes rectangulaires ; origine au foyer ; on a pour déterminer M, N, P les trois équations

$$My'+Nx'+P=r', \tag{1}$$

$$P^2(d^2+e^2)-2Pf(dM+eN)+f^2(M^2+N^2-1)=0, \tag{2}$$

$$P^2(d'^2-e'^2)-2Pf'(d'M+e'N)+f'^2(M^2+N^2-1)=0. \tag{3}$$

On parvient par élimination à une équation en P du quatrième degré.

XXVI. *Problème.* Connaissant deux points d'une conique et deux tangentes, trouver le lieu des foyers.

Solution. On obtient la solution au moyen de l'équation (2) de la page 263.

XXVII. *Problème.* Étant données trois tangentes et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Axes rectangulaires, origine au foyer;

$$dy+ex+f=0,\ d'y+e'x+f'=0,\ d''x+e''y+f''=0;$$

équations des trois tangentes, aux équations (2) et (3) du problème XXV, il faut joindre celle-ci

$$P^2(d''^2+e''^2)-2Pf''(d''M-e''N)+f''^2(M^2+N^2+1)=0,$$

et on parvient à une équation finale en P du huitième degré.

(*La suite prochainement.*)