FINCK

De la division abrégée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 328-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__328_1>

DE LA DIVISION ABRÉGÉE.

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au college de Strasbourg.

—

J'ai prouvé (*Arithm.*, 2ᵉ éd. page 106 et suiv.), que la division ordonnée de Fourier donne le quotient à une unité près (en plus ou en moins), toutes les fois que le diviseur désigné n'est pas moindre que neuf fois le nombre des chiffres du quotient. L'ouvrage de M. Guy, annoncé dans le cahier d'avril (p. 208), m'a conduit à réfléchir sur la méthode abrégée ancienne, et j'ai à cet égard decouvert un théorème que voici.

Si, à la droite du diviseur on supprime successivement un certain nombre de chiffres, et qu'à la droite du dividende, on supprime d'un coup le même nombre de chiffres, le quotient sera exact à une unité près (en plus ou en moins), *toutes les fois que le dernier diviseur ne sera pas moindre que la somme* *des chiffres successivement supprimés au diviseur total.* Soit D le diviseur total, d son chiffre de droite ; posons

$$\left.\begin{array}{lll} D & = D_1 10 + d_1, & \\ D_1 & = D_2 10 + d_2, \quad d_2 \text{ chiffre de droite de } D_1, & \\ \vdots & & \\ D_{n-1} & = D_n 10 + d_n, \quad d_n, \ldots & D_{n-1}, \\ \vdots & & \\ D_{i-1} & = D_i 10 + d_i, \quad d_i, \ldots & D_{i-1}, \end{array}\right\} (1)$$

soit D_i le dernier diviseur. On a

$$D = D_i 10^i + d_{i-1} 10^{i-1} + \ldots + d_2 10 + d_1.$$

Ce que j'écrirai sous forme plus abrégée, ainsi

$$D = D_i 10^i + (d_i d_{i-1} \ldots d_2 d_1), \qquad (2)$$

$d_i d_{i-1} \ldots$ étant des chiffres écrits dans le système de numération. J'emploierai cette manière d'écrire, en y ajoutant les parenthèses.

Soit C_1 le chiffre que fournit au quotient le diviseur D_1,

$$\begin{array}{ll} C_2 \ldots\ldots & D_2, \\ \vdots & \\ C_i \ldots\ldots & D_i. \end{array}$$

Les produits qui n'ont pas été retranchés du dividende, sont les suivants :

Celui de C_1 par d_1, et comme C_1 est le chiffre de rang i ; au quotient, ce produit vaut $C_1 \times d_1 10^{i-1}$,
celui de C_2 par $(d_2 d_1)$ qui vaut $C_2 \times (d_2 d_1)\, 10^{i-2}$,
enfin celui de C_i par $(d_i d_{i-2} \ldots d_1)$, valant $C_i \times (d_i d_{i-1} \ldots d_1 d_2)$.

J'appelle S la somme de ces produits, et j'ai

$$S = C_1 \times d_1 10^{i-1} + C_2 \times (d_2 d_1) 10^{i-2} + \ldots + C_i \times (d_i d_{i-1} \ldots d_2 d_1). \quad (3)$$

Soit R_1 le reste fourni par le diviseur tronqué D_1, reste qui est le dividende de D_2.

R_i le reste fourni par le diviseur D_i ;

R_i suivi des chiffres négligés au dividende, forme le reste total, que je nomme R; si $a_i, a_{i-1}, \dots a_1$ sont les chiffres en question, on a

$$R = R_i 10^i + (a_i a_{i-1} \dots a_1), \qquad (4)$$

et R — S serait le reste trouvé par la méthode rigoureuse.

Je fais provisoirement abstraction du cas singulier où il se trouve un dividende $>$ le décuple de son diviseur · ainsi $R_i < D_i$ et $R < D$; si donc S est aussi $< D$, le quotient sera exact à une unité près, en plus ou en moins. Mais dans ce cas, chaque chiffre du quotient est au plus 9, donc d'après (3);

$$S \overset{=}{<} 9\,[d_1 10^{i-1} + (d_2 d_1)\, 10^{i-2} + \dots + (d_i d_{i-1} \dots d_1)]. \qquad (5)$$

Il y a ici un chiffre d_1 à chaque rang, depuis le premier à droite jusqu'au rang i, ce qui fait un nombre composé de i chiffres d_1 consécutifs; ce nombre $\times 9$, donne un produit moindre que $d_1 10_i$.

Il y a un chiffre d_2 à chaque rang, depuis le second à droite jusqu'au rang i, en multipliant par 9, on a donc à fortiori un produit $< d^i 10_i$.

Enfin le chiffre d_i au rang i, multiplié par 9, donne un résultat $< d_i 10^i$. Donc $S < 10^i [d_i + \dots + d_1]$, et pour que S soit $< D$ qui $\overset{=}{>} D_i 10^i$, il suffit que

$$D_i \overset{=}{>} d_i + \dots + d_1, \text{ c. q. f. d.} \qquad (6)$$

Mais on ne sait si $R - S$ est < 0 ou > 0.

J'arrive au cas où il y a un dividende $\overset{=}{>}$, à 10 fois son diviseur. Soit le diviseur $D_{n-1} = D_n . 10 + d_n$; son reste peut être $D_n . 10 + d_n - k$, k étant au moins $= 1$; le diviseur suivant est D_n, et par suite, si on prend pour quotient 9, le reste sera $D_n + d_n - k = D_{n+1} . 10 + d_{n+1} + d_n - k$; celui qui est divisé par D_{n+1} donne pour quotient 9, et pour reste

$D_{n+1} + d_{n+1} + d_n - k$; continuant ainsi, on aura $R_i = D_i + d_i + d_{i+1} + \ldots + d_n - k < 2D_1$, d'après (6). Ainsi

$$R = (D_i + d_i + \ldots + d_n - k)\,10^i + (a_i \ldots a_1) < 2D. \tag{7}$$

Comme d'ailleurs $S < D$, le quotient est approché à moins de deux unités près ; je dis qu'il l'est en moins ; car en vertu de ce que $S < 10^i\,(d_i + \ldots + d_1)$,

$$R - S > (D_i - d_{n-1} - \ldots - d_1 - k)\,10^i + (a_i \ldots a_1),$$

et comme $k < d_n$, et que $D_i \overset{=}{>} d_i + \ldots + d_n + \ldots + d_1$, $R - S$ est > 0. Donc il s'ensuit qu'en admettant pour C_n, le quotient 10, ce qui augmentera le chiffre précédent d'une unité, et faisant $C_{n+1} = \ldots = C_i = 0$, on a encore le quotient à une unité près, mais on ne sait s'il est en plus ou en moins.