Nouvelles annales de mathématiques

Ossian Bonnet

Essai sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 388-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__388_1>

ESSAI

Sur la détermination approximative des racines imaginaires d'une équation algébrique.

Suite. V. p. 173.)

IX.

Calculons la distance mm_1.

Soient $P = c$, $P = c + dc$, deux courbes infiniment voisines, comprises entre $P = A$ et $P = 0$.

La partie $\mu\mu_1$ de la tangente mG interceptée par ces deux courbes sera d'abord, en appelant dn la distance normale des deux courbes comptée à partir du point μ, où la première de ces courbes est rencontrée par la tangente mG, et par φ celui des deux angles positifs que la tangente de cette courbe au point μ, fait avec la partie positive de l'axe des x, pour lequel $\sin(\theta - \varphi)$ est positif (*)

$$\mu\mu_1 = \frac{dn}{\sin(\theta - \varphi)},$$

mais x, y et $x + dx$, $y + dy$ étant les coordonnées respectives des deux points μ et ν, on a

$$\frac{dx}{\frac{dP}{dx}} = \frac{dy}{\frac{dP}{dy}} = \frac{dn^2}{\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy} = \pm \frac{dn}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}},$$

et

$$\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy = dc,$$

d'où l'on tire

$$dn = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}},$$

on peut donc écrire

$$\mu\mu_1 = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}\sin(\theta - \varphi)},$$

(*) Nous devons dire que la partie de la tangente à la courbe P = C, qui détermine l'angle φ est toujours du même côté de mG; cela résulte de ce que les tangentes aux courbes P = C ne peuvent être parallèles à l'axe des x, ni coïncider avec mG, or voici comment ce dernier point peut être établi si mG pouvait être tangente à une courbe P = C, cette courbe couperait en deux points la courbe $P = \frac{A}{B}Q$, sous le même angle d'ailleurs, on pourrait donc trouver une autre courbe P = C, n'ayant qu'un point commun avec $P = \frac{A}{B}Q$, et coupant cette dernière sous des angles égaux, ce qui est impossible, car cette courbe aurait un point anguleux.

le signe $\pm$ étant évidemment celui de dc. De là on déduit la longueur cherchée ·

$$mm_1 = \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi)};$$

l'intégrale du second membre étant prise depuis la courbe $P = A$ jusqu'à la courbe $P = 0$.

X.

Maintenant, pour que cette expression soit plus grande que la valeur de ρ :

$$\rho = \frac{\pm A}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2} \sin(\theta - \varphi_1)} =$$

$$= \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2} \sin(\theta - \varphi_1)} \quad (*),$$

il suffit que l'expression positive

$$(6) \quad \sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi)$$

aille en diminuant, à mesure qu'en suivant la tangente mG on s'éloigne du point m, ce qui exige que pour un pareil déplacement, la différentielle de l'expression (6) soit négative.

Or la différentielle dont il s'agit a pour valeur :

$$-\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right\} \cos(\theta - \varphi) d\varphi + \sin(\theta - \varphi)\left(\frac{dP}{dx} d.\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} d.\frac{dP}{dy}\right),$$

(*) Pour pouvoir dire que $\pm A = \int \pm dc$, il faut que c varie dans le même sens quand on parcourt la droite mm_1, or si cela n'était pas, il faudrait que c pût rester constant dans le passage d'un point de mm_1 à un point de la même ligne infiniment voisin du premier, ou bien que mm_1 pût être tangente à une courbe $P = C$, ce qui a été démontré être impossible.

indépendamment du facteur $\left\{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2+\left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$, qui ne peut rien au signe; d'ailleurs

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tang}\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}, \text{ d'où } d\varphi = \frac{\frac{dP}{dx}d.\frac{dP}{dy}-\frac{dP}{dy}d.\frac{dP}{dx}}{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2+\left(\frac{dP}{dy}\right)^2};$$

substituant, il vient :

$$\begin{aligned}&-\cos(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}d.\frac{dP}{dy}-\frac{dP}{dy}d.\frac{dP}{dx}\right)\\&+\sin(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}d.\frac{dP}{dx}+\frac{dP}{dy}d.\frac{dP}{dy}\right);\end{aligned}$$

ou effectuant les différentiations, et divisant par la différentielle de la variable indépendante,

$$\begin{aligned}&-\cos(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dxdy}\cos\theta+\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dy^2}\sin\theta-\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dx^2}\cos\theta-\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dxdy}\sin\theta\right)\\&+\sin(\theta-\varphi)\left(\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dx^2}\cos\theta+\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dxdy}\sin\theta+\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dxdy}\cos\theta+\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dy^2}\sin\theta\right).\end{aligned}$$

Ce que l'on peut, en négligeant le facteur positif $\left(\frac{dP}{dy}\right)^2$, mettre sous la forme :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\,\frac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dx}+\sin\theta\,\frac{d\,\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dy}\right\}\\&+\sin(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\,\frac{d.\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dy}-\sin\theta\,\frac{d\,\frac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dx}\right\},\end{aligned}\right.$$

en remarquant que

$$\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dxdy}=\frac{d.\dfrac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dy}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2,$$

$$\frac{dP}{dx}\frac{d^2P}{dxdy}+\frac{dP}{dy}\frac{d^2P}{dy^2}=-\frac{d.\dfrac{\frac{dP}{dx}}{\frac{dP}{dy}}}{dx}\left(\frac{dP}{dy}\right)^2,$$

en vertu de la relation

$$\frac{d^2P}{dx^2}=-\frac{d^2P}{dy^2}.$$

XI.

L'expression (7) peut se mettre sous une forme beaucoup plus simple. Remarquons d'abord que cette expression revient à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &-\cos(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}+\sin\theta\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}\right\}\\ &-\sin(\theta-\varphi)\left\{\cos\theta\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}-\sin\theta\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Or considérons la courbe représentée par une équation de la forme $\mathrm{tang}\,\varphi=c$, et passant par le point μ de la tangente mG, dont les coordonnées sont les valeurs de x et de y qui se trouvent dans l'expression (7) ; soit χ l'un des deux angles positifs que la tangente de cette courbe au point x, y fait avec la partie positive de l'axe des x, on aura :

$$\mathrm{tang}\,\chi=-\frac{\dfrac{d.\,\mathrm{tang}\,\varphi}{dx}}{d.\dfrac{\mathrm{tang}\,\varphi}{dy}};$$

d'où

$$\sin\chi = \frac{-\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2}};$$

déterminons le signe placé devant le radical, nous avons :

$$\frac{\sin\chi}{\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}} = \frac{-\cos\chi}{\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}} = \frac{\sin\chi dx - \cos\chi dy}{\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}dx + \dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}dy} =$$

$$= \frac{\sin\chi dx - \cos\chi dy}{d.\operatorname{tang}\varphi}.$$

Supposons que dx et dy soient les accroissements de x et de y qui se rapportent à un déplacement infiniment petit effectué sur la portion de la tangente à la courbe P=C, qui détermine l'angle φ, si nous supposons que la courbe P=C, occupe la position que nous lui avons donnée dans la fig. B (*), on aura ·

$$dx = h\cos\varphi, \quad dy = h\sin\varphi, \quad d.\operatorname{tang}\varphi = -k,$$

h et k étant des quantités infiniment petites positives. Donc, si nous prenons χ de manière que $\sin(\chi-\varphi)$ soit positif, ce qui revient à considérer la partie de la tangente à la courbe $\operatorname{tang}\varphi$=C, située au-dessus de la tangente à la courbe P=C, on aura :

$$\sin\chi = -g\,\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}, \qquad \cos\chi = g\,\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx},$$

(*) Je me suis assuré que toutes les autres positions conduisaient au même résultat.

g étant un nombre positif. Il faudra donc prendre alors les signes supérieurs dans les expressions de $\sin\chi$ et $\cos\chi$, écrites plus haut, ce qui donnera :

$$\sin\chi = \frac{-\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2}};$$

d'où

$$\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx} = -\sin\chi\sqrt{\left(\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2},$$

$$\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy} = \cos\chi\sqrt{\left(\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2},$$

d'où substituant dans l'expression (8), et supprimant le facteur positif $\sqrt{\left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d.\operatorname{tang}\varphi}{dy}\right)^2}$, il vient :

$$\cos(\theta-\varphi)(\cos\theta\sin\chi-\sin\theta\cos\chi)-\sin(\theta-\varphi)(\cos\theta\cos\chi+\sin\theta\sin\chi);$$

ce qui revient à

$$\cos(\theta-\varphi)\sin(\chi-\theta)-\sin(\theta-\varphi)\cos(\chi-\theta),$$

ou enfin

$$(9) \qquad \sin(\chi+\varphi-2\theta).$$

XII.

Sous la forme que nous venons d'obtenir, il est facile de reconnaître que la différentielle de l'expression (6) ne peut être supposée indéfiniment négative, mais qu'au contraire elle finira toujours par être positive, et qu'elle est même positive si les conditions du § III se trouvent remplies.

Remarquons pour cela que lorsqu'une courbe $\tang \varphi = c$, touche une courbe $P = cQ + c_1$, il y a au point de contact une inflexion pour la courbe $P = cQ + c_1$: en effet cette dernière courbe fait, comme on l'a dit au § IV, le même angle avec toutes les courbes $P = c$; or si deux points consécutifs de $P = cQ + c_1$, appartiennent à la courbe $\tang \varphi = c$, qui est le lieu des points pour lesquels les tangentes aux courbes $P = c$, sont également inclinées sur l'axe des x, il est évident qu'il y aura deux points consécutifs de $P = cQ + c_1$, où la tangente sera la même, et par conséquent une inflexion pour cette courbe. Cela étant, concevons la courbe $P = cQ + c_1$, qui passe par le point μ, et dont la tangente en ce point fait un angle χ avec la partie positive de l'axe des x, cette courbe touchera la courbe $\tang \varphi = c$ qui passe au point μ, et par conséquent admettra un point d'inflexion en ce point μ, donc si contrairement à ce que nous voulons établir, on avait :

$$\sin(\chi + \varphi - 2\theta) < 0 \text{ ou } \chi - \theta < \theta - \varphi \text{ ou } \chi - \varphi < 2(\theta - \varphi);$$

d'où
$$\theta - \varphi > \frac{\chi - \varphi}{2}.$$

Il ne serait pas vrai de dire, comme le supposent les conditions du § III, que la tangente mG de la courbe $P = \frac{A}{B} Q$, fait avec toutes les courbes $P = c$, comprises entre celle de ces courbes qui passe au point m, et celle qui passe au point de rencontre m_2 de mG avec la courbe $Q = 0$, des angles plus petits que la moitié du plus petit de ceux que forment avec la courbe $P = 0$, ou les courbes $P = c$, celles des courbes $P = cQ + c_1$, qui ont des points d'inflexion dans le contour. Nous conclurons donc que les conditions supposées étant remplies, la différentielle de l'expression (6) est positive, et par conséquent que la valeur approchée de ρ, déduite des équations (4) et (5) est plus grande que la partie mm_1 de la tangente mG à la courbe $P = \frac{A}{B} Q$, comprise entre le point de contact m et la courbe $P = 0$.

XIII.

Je dis maintenant que la valeur de ρ est plus petite que la partie mm_2 de la tangente mG, comprise entre le point m et le point où cette ligne rencontre la courbe $Q=0$. Pour le faire voir, calculons cette longueur : soient $Q=c$, $Q=c+dc$, deux courbes infiniment voisines et comprises entre $Q=B$ et $Q=0$; la partie dp de la tangente mG comprise entre ces deux courbes, pourra être mise sous la forme :

$$dp = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi + 90)},$$

θ et φ représentant les mêmes angles que ci-dessus, et le signe $\pm$ de dc, étant choisi de manière que dp soit positif, et par conséquent étant celui de dc, puisque $\theta \quad \varphi$ est positif, et de plus, plus petit que 90°, d'après les conditions du § III.

Or on a :

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP}{dy}, \quad \frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx},$$

on peut donc encore écrire :

$$dp = \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi + 90)},$$

d'où l'on déduit :

$$mm_2 = \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2} \sin(\theta - \varphi + 90)}.$$

L'intégrale étant étendue depuis la courbe $Q = B$ jusqu'à la courbe $Q = 0$. Maintenant pour que cette longueur soit plus grande que

$$\rho = \frac{-B}{\frac{dB}{d\alpha}\cos\theta + \frac{dB}{d\beta}\sin\theta} = \int \frac{\pm dc}{\sqrt{\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dA}{d\beta}\right)^2}\sin(90+\theta-\varphi_1)} \ (*),$$

il suffit que l'expression positive

$$(10) \qquad \sqrt{\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2}\sin(90+\theta-\varphi)$$

aille en diminuant à mesure qu'en suivant la tangente mG on s'éloigne du point m, ce qui exige que pour un pareil déplacement la différentielle de l'expression (10) soit négative. Or cette expression se déduisant de l'expression (6) par l'échange de θ en $90+\theta$, on voit sans aucun calcul que le signe de la différentielle sera celui de l'expression (9), dans laquelle on aura changé θ en $90+\theta$, c'est-à-dire celui de l'expression

$$\sin(\chi + \varphi - 2\theta - 180) = -\sin(\chi + \varphi - 2\theta).$$

Signe qui est — d'après ce qui a été démontré au § XII. Ainsi comme nous l'avions annoncé, la partie mm_1 de la tangente mG comprise entre les deux courbes $Q=B$, $Q=0$, est plus petite que la valeur approchée de ρ.

(*La fin prochainement.*)