Rayons de courbure dans les coniques, d'après le professeur Strehlke

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 399-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__399_1>

RAYONS DE COURBURE DANS LES CONIQUES.

D'après le professeur Strehlke (Crelle, tom. II, pag. 380. 1827).

I. *Lemme.* Soit $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ l'équation d'un cercle, axes rectangulaires; α, β; α', β'; α'', β'' étant les coordonnées de trois points pris sur la circonférence, on déduit ·

$$2p+\frac{2(\beta-\beta')}{\alpha-\alpha'}q=\alpha+\alpha'+\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'},$$

$$2p+\frac{2(\beta-\beta'')}{\alpha-\alpha''}q=\alpha+\alpha''+\frac{\beta^2-\beta''^2}{\alpha-\alpha''}.$$

II. Soit $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ l'équation d'une ellipse, axes rectangulaires; α,β; α',β'; α'',β'' trois points pris sur cette ellipse. Faisant $x=a\cos\varphi$, on aura $y=b\sin\varphi$; donc aussi :

$$\alpha=a\cos\varphi,\ \beta=b\sin\varphi;\quad \alpha'=a\cos\varphi',\ \beta=b\sin\varphi';$$
$$\alpha''=\cos\varphi'',\ \beta''=b\sin\varphi'';$$

d'où

$$\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2},$$
$$\alpha+\alpha'=a(\cos\varphi+\cos\varphi'),$$
$$\frac{\beta^2-\beta'^2}{\alpha-\alpha'}=-\frac{b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi').$$

Faisant passer une circonférence par ces trois points, on aura, d'après le lemme I :

$$2p - \frac{2b}{a}\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2}q = \frac{a^2-b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi'),$$

$$2p - \frac{2b}{a}\cot\frac{\varphi+\varphi''}{2}q = \frac{a^2-b^2}{a}(\cos\varphi+\cos\varphi'');$$

d'où l'on tire :

$$q = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2};$$

et de là :

$$p = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\left[\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} - \sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\right]$$

et $$r = (\alpha-p)^2 + (\beta-q)^2.$$

Faisant $\varphi = \varphi' = \varphi''$, on a pour le cercle osculateur :

$$q = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\varphi; \quad p = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\varphi;$$

$$R = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

III. *Hyperbole*. Soit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ l'équation; faisant :

$$\alpha = \frac{a}{\cos\varphi}; \quad \beta = b\tang\varphi;$$

$$\alpha' = \frac{a}{\cos\varphi'}; \quad \beta' = b\tang\varphi';$$

$$\alpha'' = \frac{a}{\cos\varphi''}; \quad \beta'' = b\tang\varphi'';$$

et procédant de la même manière, on trouve finalement :

$$q = -\frac{a^2+b^2}{b}\tang^3\varphi; \quad p = \frac{a^2+b^2}{a\cos\varphi^3}; \quad R = \frac{(a\tang^2\varphi + b^2\text{séc}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

IV. *Parabole*. Soit $y^2 = px$ l'équation ;

$$\beta^2 = p\alpha,$$
$$\beta'^2 = p\alpha',$$
$$\beta''^2 = p\alpha'';$$

d'où l'on tire :

$$q = -\frac{4\alpha^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}; \quad p = \frac{6\alpha+p}{2}; \quad R = \frac{(p+4\alpha)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}.$$

(*Voir* Gerono, t. II, p. 170.)