Nouvelles annales de mathématiques

E. Catalan

Sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 405-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__405_1>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES.

Mon cher M. Terquem,

Je me vois forcé, à mon grand regret, de répondre à la lettre de M. Guilmin, contenue dans le dernier numéro des *Annales*; cette nouvelle réponse sera, du reste, mon dernier mot : il est temps de mettre fin à une polémique ennuyeuse pour M. Guilmin, pour moi, et peut-être aussi pour vos lecteurs.

(*) Les autres points appartiennent aux coniques ex-inscrites (p. 372, XXIX). Tm.

M. Guilmin dit en commençant : « Il m'a semblé que M. Catalan démontrait trop longuement une proposition d'algèbre élémentaire, j'ai cru utile aux élèves d'en donner une démonstration plus simple. »

M. Guilmin avait parfaitement le droit de trouver ma démonstration trop longue ; et il a bien fait de chercher, par deux fois, à en donner une qui fût plus simple. A-t-il atteint le but qu'il poursuivait ? C'est ce que nous verrons tout à l'heure.

Il ajoute : « Cette démonstration, M. Catalan ne l'a pas comprise ; cependant il paraît l'avoir étudiée avec tant de bonne volonté, que je me fais un plaisir de lui venir en aide. »

M. Guilmin qui, à ce qu'on m'assure, et ce dont je suis fâché, a pris au sérieux quelques plaisanteries, bien qu'elles ne s'adressassent qu'à sa note, M. Guilmin, dis-je, me plaisante à son tour : cela est de bonne guerre. Je pourrais riposter ; mais je préfère la logique aux épigrammes, et je continue.

Si je n'ai pas, la première fois, compris la démonstration donnée par M. Guilmin, ce n'est pas tout à fait ma faute : M. Guilmin le sait bien ; aussi, après le préambule que je viens de citer, fait-il une nouvelle rédaction de la démonstration dont il s'agit, rédaction aussi claire que l'autre était obscure.

Malheureusement, M. Guilmin regarde comme évidente la proposition qui est l'objet même du débat, et il fait un long calcul pour prouver une chose évidente. La première démonstration péchait par la forme : celle-ci, si je ne me trompe, pèche par le fond ; et, chose assez singulière, elle est à la fois incomplète et surabondante. C'est ce que je vais tâcher de faire voir.

Supposons, pour prendre d'abord un exemple très-simple, qu'ayant démontré la convergence de la série

$$a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots,$$

on veuille trouver la *valeur* de cette série, c'est-à-dire *la limite finie et déterminée vers laquelle tend la somme des* n *premiers termes*, *lorsque* n *augmente indéfiniment*. Si l'on représente par x cette valeur, il me paraît évident que l'on peut écrire, sans aucun calcul :

$$x = a + ax;$$

car la série pourrait se mettre sous la forme :

$$a + a(a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots).$$

Ainsi, dans cet exemple, la seule difficulté consiste à faire voir que, pour $a < 1$, la série a une valeur.

Soit, en second lieu, la fraction continue périodique

$$a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}$$

S'il a été démontré que, le nombre des périodes augmentant indéfiniment, les réduites successives s'approchent sans cesse d'une limite finie et déterminée x, on aura *évidemment* :

$$x = a + \frac{1}{x}.$$

Mais ce qui n'est pas évident, ce qui exigeait une démonstration, c'est que toute fraction continue composée d'un nombre illimité de termes, *a une valeur*. M. Guilmin ne paraît pas avoir envisagé la question de cette manière ; aussi, comme je l'ai déjà dit, admet-il la proposition qu'il s'agissait précisément de démontrer, et s'attache-t-il, par compensation, à faire voir que

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}} \quad . \quad = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}$$

et cela était assez peu nécessaire.

Permettez-moi, monsieur, de faire ici quelques remarques sur des fractions continues différentes de celles que l'on considère ordinairement ; remarques qui pourront servir à éclaircir encore la question.

Soit la fraction continue très-simple :

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\ldots}}}$$

Si l'on termine cette fraction au premier terme, au second terme, etc., on trouve successivement :

$$1, \quad 0, \quad \infty, \quad 1, \quad 0, \quad \infty, \quad \ldots.$$

Ces quantités sont périodiques : il n'y a donc pas lieu de chercher une valeur pour la fraction, et c'est à tort que l'on écrirait :

$$x=1-\frac{1}{x}.$$

Soit ensuite la fraction continue :

$$-1+\cfrac{6}{-1+\cfrac{6}{-1+\cfrac{6}{-1+\ldots}}}$$

On trouve successivement :

$$-1, \quad -7, \quad -\frac{13}{7}, \quad -\frac{55}{13}, \quad -\frac{138}{55}, \quad \ldots..$$

Il n'est nullement évident que ces nombres tendent vers une limite x, et *à priori*, rien ne fait supposer que l'on puisse écrire :

$$x=-1+\frac{6}{x}.$$

Si, dans le premier exemple, le raisonnement ordinaire conduit à un résultat absurde, et si, dans le second, le même raisonnement conduit à un résultat qui est peut-être faux, il est donc absolument indispensable, dans la théorie élémentaire des fractions continues, de faire voir qu'une fraction de la forme $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}$ a une valeur.

Considérons plus généralement la fraction périodique

$$\cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - \text{etc.}}}}}$$

En admettant que cette fraction ait une valeur x, nous aurons :

$$x = \cfrac{a}{1 - \cfrac{b}{1 - x}}$$

d'où

$$x^2 + (b - a - 1)\, x + a = 0.$$

Il est, je pense, assez facile de démontrer :

1° Que si cette équation a ses racines réelles, la fraction continue a une valeur égale à l'une des deux racines de cette équation ;

2° Que si l'équation a ses racines imaginaires, la fraction n'a pas de valeur, c'est-à-dire que les réduites se reproduisent périodiquement, en passant par l'infini.

Agréez, etc. E. Catalan.

Paris, 10 juillet 1845