Nouvelles annales de mathématiques

F. M. Paignon

Rayons de courbure principaux de l'hélicoïde gauche

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 413-415

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__413_1>

RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX

de l'hélicoïde gauche.

PAR M. F. M.[e] PAIGNON.

Parmi les surfaces conoïdes, trouver celle en chacun des points de laquelle les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires.

L'équation différentielle des conoïdes est :

$$px + qy = 0.$$

On en déduit, par la différentiation :

$$rx + p + sy = 0,$$
$$sx + ty + q = 0.$$

Eliminant x et y entre ces trois équations, on obtient :

$$p^2t + q^2r - 2pqs = 0.$$

La condition pour que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires est d'ailleurs :

$$(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs=0.$$

Si entre cette équation et la précédente, on élimine tour à tour t et r, on obtient les deux équations :

$$(1)\qquad r(p^2-q^2)+2pqs=0,$$

$$(2)\qquad t(p^2-q^2)-2pqs=0.$$

On peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$(p^2-q^2)\frac{dp}{dx}+2pq\frac{dq}{dx}=0.$$

On en déduit par l'intégration, en désignant par Y une fonction arbitraire de y :

$$(3)\qquad Y=\frac{p}{p^2+q^2}.$$

On déduit de même de l'équation (2) :

$$(4)\qquad X=\frac{q}{p^2+q^2},$$

(X désignant une fonction arbitraire de x).

Des équations (3) et (4) on déduit :

$$p=\frac{Y}{X^2+Y^2},$$

$$q=\frac{X}{X^2+Y^2}.$$

Or on doit avoir entre p et q la relation

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},$$

qui devient, après toutes les réductions effectuées :

$$\frac{dX}{dx}=-\frac{dY}{dy},$$

relation qui ne peut être satisfaite qu'en posant :

$$\frac{dX}{dx}=a,$$

(a désignant une constante arbitraire).

On a donc :

$$X = ax + b,$$
$$Y = -ay + c,$$

(b et c représentant aussi des constantes arbitraires).

On a alors pour p et q les valeurs suivantes :

$$p = \frac{c - ay}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2},$$

$$q = \frac{ax + b}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2}.$$

L'équation différentielle de la surface cherchée est donc :

$$dz = \frac{(c - ay)\,dx}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2} + \frac{(ax + b)\,dy}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2}.$$

On trouve en l'intégrant et désignant par e une constante arbitraire :

$$\frac{ax + b}{c - ay} = tg\,(e - az).$$

On voit alors que la surface cherchée est un *hélicoide gauche.* On pouvait d'ailleurs, en partant de l'équation de l'hélicoïde, reconnaître l'existence de cette propriété ; mais le problème résolu prouve que cet hélicoïde est la seule surface conoïde jouissant de la propriété énoncée.

Note. Ce problème a aussi été traité par M. Catalan (Journal de l'École polytechnique, cahier 29, p. 127, 1843, et Liouville, VII, 203, 1842).