

F. M. PAIGNON

**Rayons de courbure principaux de  
l'hélicoïde gauche**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 4  
(1845), p. 413-415

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1845\\_1\\_4\\_\\_413\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__413_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX

*de l'hélicoïde gauche.*

**PAR M. F. M.<sup>e</sup> PAIGNON.**

—

*Parmi les surfaces conoïdes, trouver celle en chacun des points de laquelle les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires.*

L'équation différentielle des conoïdes est :

$$px + qy = 0.$$

On en déduit, par la différentiation :

$$rx + p + sy = 0,$$

$$sx + ty + q = 0.$$

Eliminant  $x$  et  $y$  entre ces trois équations, on obtient :

$$p^2t + q^2r - 2pqs = 0.$$

La condition pour que les rayons de courbure principaux soient égaux et de signes contraires est d'ailleurs :

$$(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs = 0.$$

Si entre cette équation et la précédente, on élimine tour à tour  $t$  et  $r$ , on obtient les deux équations :

$$(1) \quad r(p^2 - q^2) + 2pqs = 0,$$

$$(2) \quad t(p^2 - q^2) - 2pqs = 0.$$

On peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$(p^2 - q^2) \frac{dp}{dx} + 2pq \frac{dq}{dx} = 0.$$

On en déduit par l'intégration, en désignant par  $Y$  une fonction arbitraire de  $x$  :

$$(3) \quad Y = \frac{P}{p^2 + q^2}.$$

On déduit de même de l'équation (2) :

$$(4) \quad X = \frac{q}{p^2 + q^2},$$

( $X$  désignant une fonction arbitraire de  $x$ ).

Des équations (3) et (4) on déduit :

$$p = \frac{Y}{X^2 + Y^2},$$

$$q = \frac{X}{X^2 + Y^2}.$$

Or on doit avoir entre  $p$  et  $q$  la relation

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

qui devient, après toutes les réductions effectuées :

$$\frac{dX}{dx} = - \frac{dY}{dy},$$

relation qui ne peut être satisfaite qu'en posant :

$$\frac{dX}{dx} = a,$$

( $a$  désignant une constante arbitraire).

On a donc :

$$\begin{aligned} X &= ax + b, \\ Y &= -ay + c, \end{aligned}$$

( $b$  et  $c$  représentant aussi des constantes arbitraires).

On a alors pour  $p$  et  $q$  les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} p &= \frac{c - ay}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2}, \\ q &= \frac{ax + b}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle de la surface cherchée est donc :

$$dz = \frac{(c - ay) dx}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2} + \frac{(ax + b) dy}{(ax + b)^2 + (c - ay)^2}.$$

On trouve en l'intégrant et désignant par  $e$  une constante arbitraire :

$$\frac{ax + b}{c - ay} = \operatorname{tg}(e - az).$$

On voit alors que la surface cherchée est un *hélicoïde gauche*. On pouvait d'ailleurs, en partant de l'équation de l'hélicoïde, reconnaître l'existence de cette propriété ; mais le problème résolu prouve que cet hélicoïde est la seule surface conoïde jouissant de la propriété énoncée.

*Note.* Ce problème a aussi été traité par M. Catalan (Journal de l'École polytechnique, cahier 29, p. 127, 1843, et Liouville, VII, 203, 1849).

---