NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON (DE CHAMP)

Note sur la démonstration de la proposition XI du livre IV de la géométrie de Legendre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 415-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__415_1>

NOTE

Sur la démonstration de la proposition XI du livre IV de la Géométrie de Legendre.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

Rappelons d'abord l'énoncé de cette proposition :

Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons.

Pour démontrer ce théorème, Legendre suppose tour à tour qu'au lieu de *circ.* R : *circ.* r :: R : r, on ait, s'il est possible, R : r :: *circ.* R : *circ.* r', r' étant en premier lieu moindre que r, ensuite plus grand, et il fait voir que ces deux hypothèses conduiraient à des résultats absurdes.

Les partisans de la méthode des limites attaquent cette démonstration, en ce que l'on y suppose implicitement *qu'il y a des circonférences de toutes les grandeurs.* Telle est l'objection reproduite par M. Catalan, dans la préface de son excellent traité de géométrie, où il expose d'ailleurs que le mode de démonstration connu sous le nom de *réduction à l'absurde* lui paraît avoir un vice radical, savoir qu'il n'indique en aucune manière le chemin que l'on aurait pu prendre pour trouver tel ou tel théorème.

On a certainement exagéré les difficultés de cette *réduction à l'absurde*, et je crois exprimer une opinion vraie en disant que les démonstrations où ce principe est employé, ne sont pas plus longues que les démonstrations par la méthode des limites, pourvu que l'on tienne compte des explications préliminaires nécessitées par cette méthode même. Dans beaucoup de cas, elles sont plus courtes, et leur uniformité présente à l'enseignement des avantages incontestables.

J'avoue cependant que la méthode des limites fait mieux voir la route suivie pour découvrir la vérité. Mais celle des infiniment petits atteint bien plus parfaitement ce but, et sans doute, si elle n'est pas écrite dans les traités élémentaires, c'est qu'elle se présente naturellement, et fournit les notions que la réduction à l'absurde achève de démontrer. Il ne pouvait entrer dans les vues de Legendre, d'écrire ce que tout le monde aperçoit intuitivement ; l'illustre géomètre n'a dû insister que pour établir les choses en toute rigueur.

Ces réflexions étaient nécessaires pour montrer qu'il est permis de préférer à la méthode des limites, le principe d'exhaustion, ce beau fleuron de la géométrie ancienne. Je reviens maintenant au théorème, objet de cette note, dont on a dit que la démonstration par la réduction à l'absurde n'est pas rigoureuse.

Puisque l'on ne veut point admettre qu'il y ait des circonférences de toutes les grandeurs, je ne supposerai pas un quatrième terme plus grand ou moindre que *circ.* r, mais je dirai :

Supposons, s'il est possible, qu'on ait *circ.* R : *circ.* r :: R : r', r' étant un rayon moindre que r Comme il y a évidemment des rayons, sinon des circonférences de toutes les grandeurs, cette manière de présenter la démonstration écartera la difficulté.

A la circonférence dont le rayon est r', que je suppose décrite concentriquement à *circ.* r, circonscrivez un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas *circ.* r. Circonscrivez à *circ.* R un polygone semblable, on aura entre les périmètres de ces polygones, et les rayons des cercles inscrits *pol.* R : *pol.* r' :: R : r', et comme on a supposé *circ.* R : *circ.* r :: R : r', on aura aussi *circ.* R : *circ.* r :: *pol.* R : *pol.* r', proportion impossible, puisque *circ.* R est moindre que *pol.* R, et *circ.* r plus grand que *pol.* r', donc, etc. Ce qu'on vient de dire suffit pour achever la démonstration.

Il y a donc des circonférences et des cercles de toutes les grandeurs, conclusion qui lève une grande partie des objections du genre de celle qui a été faite par M. Catalan. Cet exemple fait voir comment il semble que Legendre aurait admis implicitement, dans les démonstrations de plusieurs propositions importantes, des vérités tout aussi difficiles à prouver que celles qui font l'objet de ces propositions. Tout le traité de Legendre peut être mis, par des moyens analogues, à l'abri de ce reproche.

Dans ce qui précède, je n'ai touché en rien à la définition du rapport de deux quantités incommensurables entre elles, ce sera l'objet d'une autre note.

Note. Nous croyons que le principe si évident d'Arbogast suffit à tout, au passage des dimensions *courbes* aux dimensions *rectilignes*, et au passage du commensurable à l'incommensurable ; savoir : que deux quantités constantes sont égales, lorsqu'elles sont comprises entre deux limites variables, et dont la différence peut devenir moindre qu'aucune quantité donnée. Ce principe a le mérite de la clarté, de la rigueur, de l'universalité, de l'uniformité, et même de la brièveté. Nous attribuons ce principe au célèbre analyste de Strasbourg, parce qu'il est énoncé dans un mémoire présenté à l'Institut, et non encore publié, sur les principes du calcul infinitésimal ; mémoire qui sert de base aux travaux les plus récents, et à l'enseignement *polytechnique* actuel de cette partie de la science (Voir *Calc. des dérivations*, préface, XII, note 1800; et *Lacroix*, *Calc. diff.*, tome I, § 239).

Ainsi dans le cas actuel $\frac{C}{R}$ est compris entre $\frac{P}{R}$ et $\frac{p}{R}$; P et p sont deux polygones réguliers de même nom, l'un circonscrit, l'autre inscrit ; de même $\frac{C'}{R'}$ est compris entre $\frac{P'}{R'}$ et $\frac{p'}{R'}$; or $\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}$; $\frac{p}{R}=\frac{p'}{R'}$; donc $\frac{C}{R}$ et $\frac{C'}{R'}$, sont entre les mêmes limites variables $\frac{P}{R}$ et $\frac{p}{R}$, et on sait que $P-p$ peut descendre au-dessous de toute grandeur donnée ; donc $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$. La démonstration d'Euclide que $\frac{\text{cercle R}}{R^2}$ est un rapport constant, n'est pas sujette à l'objection faite contre la démonstration de Legendre (*Euclide*, XII, prop. 2) ; là on lit aussi une proposition que j'ai dit erronément n'être pas dans Euclide (t. III, p. 587, *observation*) ; l'illustre géomètre Alexandrin ne s'occupe pas du rapport $\frac{\text{circonf. R}}{\text{R}}$; il était probablement arrêté par la difficulté de démontrer que $P-p$ peut devenir plus petit qu'aucune quantité donnée ; la découverte de la constance de ce rapport est un des nombreux titres d'Archimède à l'immortalité ; il a trouvé que cercle $\text{R} = \frac{1}{2}\text{R circonf. R}$; or $\frac{\text{cercle R}}{\text{R}^2}$ est constant ; donc $\frac{\text{circonf. R}}{\text{R}}$, est aussi un rapport constant double du premier.

Tm.