Nouvelles annales de mathématiques

Sur l'évaluation du volume d'un parallélipipède à une base sphérique, d'après Euler

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 422-423

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__422_0>

SUR L'ÉVALUATION

du volume d'un parallélipipède à une base sphérique.

D'après Euler (*).

I. Soient O le centre d'une sphère; OA, OB, deux rayons à angle droit; M un point sur OA; N un point sur OB. Ayant construit le rectangle OMPN, on le prend pour base d'un parallélipipède droit, qu'on prolonge jusqu'à la sphère. Il s'agit d'évaluer le volume de cette portion de la sphère.

II. Designons par OO', MM', PP', NN' les quatre arêtes du parallélipipède.

Faisons $OM = m$; m et n sont plus petits que r:

$$ON = n\,;$$

$$OO' = r = \text{rayon de la sphère}\,;$$

on aura :

$$MM'^2 = r^2 - m^2 = m'^2\,;$$

$$PP'^2 = r^2 - m^2 - n^2 = p'^2\,;$$

$$NN'^2 = r^2 - n^2 = n'^2\,;$$

$$\frac{m}{n'} = \sin u\,;$$

$$\frac{n}{m'} = \sin v\,;$$

$$\frac{mn}{m'n'} = \sin t\,,$$

$$V = \text{le volume du parallélipipède sphérique.}$$

On a :

$$6V = 2mnp' + 2r^2\,[mu + nv - rt] + nn'^2 u + mm'^2 v.$$

(*) N. Comm. Petrop., tome XIV, p. 80, an. 1769.

III. Lorsque le point P est sur la sphère, alors $m^2+n^2=r^2$: $m=n'$; $n=m'$; et l'on a :

$$6V=\pi r^2(m+n-r)+\frac{\pi}{2}mn(m+n) ;$$

ce qui atteint le maximum lorsque $m=n$; et alors

$$m^2=\frac{r^2}{2}=n^2,\quad 6V=\frac{\pi r^3}{4}[5\sqrt{2}-4].$$