NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE JUBÉ

Sur le développement d'une spirale conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 454-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__454_1>

SUR LE

DÉVELOPPEMENT D'UNE SPIRALE CONIQUE.

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

Dans le 17[e] volume des Annales de Mathématiques de M. Gergonne (p. 166), on trouve la solution analytique de cette question :

« Suivant quelle courbe un fil parfaitement flexible et » inextensible doit-il être roulé sur la surface d'un cône » droit, pour qu'en développant ce fil, supposé se terminer » au sommet du cône, de manière à le maintenir constam- » ment tangent à la courbe, son extrémité ne sorte pas du

» plan conduit par ce sommet perpendiculairement à l'axe
» du cône? Et quelle courbe décrira alors cette extrémité sur
» le plan? »

Il me semble que ce problème peut être résolu très-simplement de la manière suivante.

Une courbe plane a toutes ses développées sur une surface cylindrique dont les arêtes sont perpendiculaires à son plan, et dans le développement de cette surface cylindrique toutes les développées suivantes produisent des lignes droites, ce qui indique que leurs tangentes sont toutes également inclinées sur le plan de la développante. La courbe qu'on veut déterminer sur le cône doit donc être partout également inclinée sur la base, et par suite sa tangente doit faire un angle constant avec la génératrice menée au point de contact, puisqu'elle est située avec cette génératrice dans un même plan tangent. De sorte que si on développe le cône sur un plan, le développement de la courbe cherchée aura partout ses tangentes également inclinées sur les rayons vecteurs menés du sommet du cône aux points de contact; propriété de la spirale logarithmique. La courbe qu'on se proposait de trouver est donc celle qu'on obtient en enroulant sur le cône un plan où est tracée une spirale logarithmique dont le sommet du cône est le point asymptote.

Si on projette toutes les génératrices du cône sur un plan parallèle à la base et passant par le sommet, on aura un système de rayons vecteurs issus de ce point, et les tangentes à la projection de la courbe cherchée seront également inclinées sur les rayons vecteurs des points de contact, et comme par hypothèse la courbe et conséquemment sa projection se terminent au sommet du cône, la projection sera aussi une spirale logarithmique.

La partie développée du fil est dans un rapport constant avec sa projection, rapport qui est aussi le même que celui d'une portion quelconque de la courbe à sa projection ; de manière que l'extrémité libre du fil décrira dans son développement la développante de la spirale logarithmique suivant laquelle se projette la courbe tracée sur le cône. On sait d'ailleurs que la développante d'une spirale logarithmique est une autre spirale logarithmique ; de sorte que l'on pourra tracer la courbe demandée par un moyen mécanique, en faisant décrire à l'extrémité libre du fil, qu'on roulerait sur le cône, les contours d'une spirale logarithmique ayant pour point asymptote le sommet du cône, et située dans un plan perpendiculaire à son axe.

Ce mode de démonstration m'a été suggéré par une note qui suit de quelques pages la solution analytique.