NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations pour que trois points dans un plan soient sur une même droite

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 462-463

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__462_1>

RELATIONS

pour que trois points dans un plan soient sur une même droite.

—

I° *Chaque point est donné par des coordonnées.*

Soit $$x_1, y_1 ;\ x_2, y_2 ;\ x_3, y_3 ;$$

les coordonnées de trois points ; pour qu'ils soient sur une même droite, on doit avoir la relation connue

$$x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1 = 0. \qquad (1)$$

Observation. Cette équation exprime que l'aire du triangle ayant pour sommets les trois points, est nulle.

II. *Chaque point est donné par l'intersection de deux droites.*

Soit $$d_n y + e_n x = f_n$$

l'équation d'une droite ; faisant l'indice n successivement égal aux six premiers nombres, on a les équations d'autant de droites ; les coordonnées du point d'intersection de deux premières droites sont

$$x = \frac{[d_1 f_2]}{[d_1 e_2]}, \quad y = \frac{[f_1 e_2]}{[d_1 e_2]}$$

ou

$$[d_1e_2] = d_1e_2 - d_2e_1\,;$$

et ainsi des autres expressions entre parenthèses ; on exprime de même les coordonnées de l'intersection de la 3^me et 4^me ligne ; et celles de l'intersection de la 5^me et 6^me droite ; substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient facilement, les calculs étant effectués, la relation suivante :

$$\left.\begin{array}{l}[d_1e_2]\,[-f_3f_5[d_4e_6]+f_3f_6[d_4e_5]+f_4f_5[d_3e_6]-f_4f_6[d_3e_5]]\\ +[d_3e_4]\,[-f_5f_1[d_6e_2]+f_5f_2[d_6e_1]+f_6f_1[d_5e_2]-f_6f_2[d_5e_1]]\\ +[d_5e_6]\,[-f_1f_3[d_2e_4]+f_1f_4[d_2e_3]+f_2f_3[d_1e_4]-f_2f_4[d_1e_3]]\end{array}\right\}\begin{array}{l}(2)\\ \\ =0.\end{array}$$

La loi de formation de la 1^re ligne est évidente ; le signe est déterminé selon la règle de Cramer par le nombre des variations ; si ce nombre est pair le signe est positif, et il est négatif pour un nombre impair de variations. La seconde ligne se déduit de la première en augmentant tous les indices de 2, et changeant 7 en 1 et 8 en 2 ; et la troisième ligne se déduit de même de la seconde.

Corollaire. Lorsque les trois systèmes de lignes sont parallèles, alors on a :

$$d_1 = d_3 = d_5\,;\ d_2 = d_4 = d_6\,;\ e_1 = e_3 = e_5\,;\ e_2 = e_4 = e_6\,;$$

la relation se réduit à

$$f_3f_6 - f_4f_5 + f_5f_2 - f_6f_1 + f_1f_4 - f_2f_3 = 0. \qquad (3)$$

(*La suite prochainement.*)